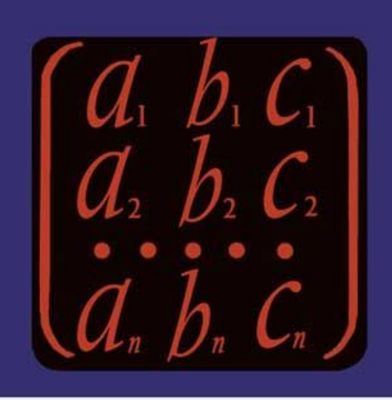
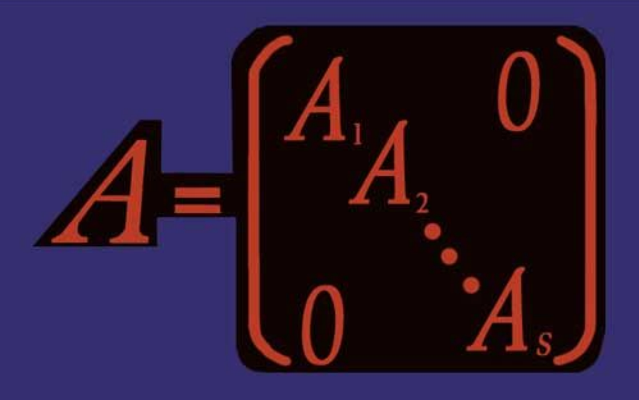
I. PROSKURIAKOV

PROBLEMAS DE ALGEBRA LINEAL





EDITORIAL MIR MOSCÚ

PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAL

И. В. ПРОСКУРЯКОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

I. PROSKURIAKOV

PROBLEMAS DE ALGEBRA LINEAL

EDITORIAL MIR MOSCU

Traducido del ruso por Consuelo Fernández Alvarez,
licenciada en Ciencias Físicas

Impreso en la URSS

На испанском языке

INDICE

PREFACIO

Al componer el presente manual el autor hizo todo lo posible, primero, por dar una cantidad suficiente de ejercicios para adquirir los hábitos necesarios para resolver los problemas tipo (por ejemplo, el cálculo de los determinantes con elementos numéricos, solución de sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes numéricos, etc.), segundo, dar problemas que contribuyan a aclarar los conceptos principales y su relación mutua (por ejemplo, la relación entre las propiedades de las matrices y las propiedades de las formas cuadráticas, por una parte, y las transformaciones lineales, por la otra), tercero, dar problemas que completen las conferencias y contribuyan a la ampliación del horizonte matemático (por ejemplo, las propiedades del agregado de Pfaff de un determinante antisimétrico, las propiedades de las matrices asociadas, etc.).

En algunos problemas se propone demostrar teoremas que pueden hallarse en los manuales. Dando estos problemas, el autor partía de que el profesor, al disponer de poco tiempo en las conferencias, podía ofrecerles a los estudiantes estudiar ellos mismos una parte del material y esto puede efectuarse mediante este compendio de problemas, en el que se dan indicaciones que ayudan a realizar las demostraciones de modo autodidáctico, lo que contribuye al desarrollo de los hábitos iniciales de la investigación científica.

El contenido y el orden de exposición del material en las conferencias dependen en lo fundamental del lector. El autor del libro se esmeró por presentar los problemas, teniendo en cuenta esta variedad de exposición. De aquí proviene cierto paralelismo y la repetición del material. Así, los mismos hechos se dan primero en la parte de las formas cuadráticas, y luego en la parte de las transformaciones lineales, algunos problemas se enuncian de manera que se puedan resolver tanto en un espacio euclídeo real, como también en uno unitario complejo. Nos parece que esto está bien para un compendio ya que ofrece mayor flexibilidad al utilizarlo.

Al principio de algunos párrafos se dan introducciones. Éstas contienen sólo breves indicaciones de la terminología y designacio-

nes en los casos cuando en los manuales no hay una total unificación con respecto a ello. La introducción al § 5 es excepción de lo dicho, en éste se dan los métodos fundamentales de cálculo de los determinantes de cualquier orden y se citan ejemplos para cada método. El autor consideró esto muy útil ya que los manuales carecen de estas indicaciones y los estudiantes chocan en estos casos con bastantes dificultades.

Los números de los problemas, en cuyas respuestas hay soluciones o indicaciones, tienen asterisco. Las soluciones se dan para una pequeña cantidad de problemas: los que contienen un método general que se aplica luego a otros problemas (por ejemplo, el problema 1151 que da el método de cálculo de la función con respecto a la matriz y el problema 1529 que contiene la construcción de la base, en la cual la matriz de la transformación lineal tiene la forma de Jordan) o los problemas de dificultad elevada (por ejemplo, 1433, 1614, 1617). Las indicaciones contienen, por regla general, sólo la idea o el método de solución, dejándole al estudiante resolver el problema por sí mismo. Sólo los problemas más difíciles tienen un breve plan de solución.

I. Proskuriakov.

DETERMINANTES

§ 1. Determinantes de segundo y tercer orden

Calcular los determinantes:

1. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$. **3.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$. **4.** $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$. **5.** $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}$. **7.** $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$. **8.** $\begin{vmatrix} a^2+ab+b^2 & a^2-ab+b^2 \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$. **10.** $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$. **11.** $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta & \cos\beta+\cos\alpha \\ \cos\beta-\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta \end{vmatrix}$. **13.** $\begin{vmatrix} 2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi & 2\operatorname{sen}^2\varphi-1 \\ 2\cos^2\varphi-1 & 2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \end{vmatrix}$.

14. $\begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$. **15.** $\begin{vmatrix} \frac{(1-t)^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} & -\frac{(1+t)^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} \frac{1+t^2}{1-t^2} & \frac{2t}{1-t^2} \\ \frac{2t}{1-t^2} & \frac{1+t^2}{1-t^2} \end{vmatrix}$. **17.** $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$.

Calcular los determinantes en los cuales $i=\sqrt{-1}$:

18. $\begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix}$. **19.** $\begin{vmatrix} a+bi & b \\ 2a & a-bi \end{vmatrix}$.

20. $\begin{vmatrix} \cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha-i\operatorname{sen}\alpha \end{vmatrix}$. **21.** $\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}$.

Resolver los sistemas de ecuaciones, empleando los determinantes:

22. $2x+5y=1,$
$3x+7y=2.$

23. $2x-3y=4,$
$4x-5y=10.$

24. $5x-7y=1,$
$x-2y=0.$

25. $4x+7y+13=0,$
$5x+8y+14=0.$

26. $x\cos\alpha-y\operatorname{sen}\alpha=\cos\beta,$
$x\operatorname{sen}\alpha+y\cos\alpha=\operatorname{sen}\beta.$

27. $x\operatorname{tg}\alpha+y=\operatorname{sen}(\alpha+\beta),$
$x-y\operatorname{tg}\alpha=\cos(\alpha+\beta),$

donde $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ (k es un número entero).

Investigar si el sistema de ecuaciones es determinado (tiene una solución única), indeterminado (tiene una cantidad infinita de soluciones) o contradictorio (no tiene solución):

28. $4x + 6y = 2,$ $6x + 9y = 3.$ ¿Darán las fórmulas de Cramer en este caso una respuesta correcta?

29. $3x - 2y = 2,$ $6x - 4y = 3.$

30. $(a - b)\,x = b - c.$

31. $x \operatorname{sen} \alpha = 1 + \operatorname{sen} \alpha.$

32. $x \operatorname{sen} \alpha = 1 + \cos \alpha.$

33. $x \operatorname{sen} (\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta.$

34. $a^2x = ab,$ $abx = b^2.$

35. $ax + by = ad,$ $bx + cy = bd.$

36. $ax + 4y = 2,$ $9x + ay = 3.$

37. $ax - 9y = 6,$ $10x - by = 10.$

38. Demostrar que para que el determinante de segundo orden sea igual a cero es necesario y suficiente que sus filas sean proporcionales. Lo mismo es justo también para las columnas (si algunos elementos del determinante son iguales a cero, la proporcionalidad puede comprenderse en sentido de que los elementos de una fila se obtienen de los correspondientes elementos de la otra fila, multiplicados por un mismo número, que también puede ser igual a cero).

39*. Demostrar que siendo a, b y c números reales, las raíces de la ecuación $\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = 0$ serán reales.

40*. Demostrar que el trinomio de segundo grado $ax^2 + 2bx + c$ con coeficientes complejos será un cuadrado perfecto, cuando y sólo cuando

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = 0.$$

41. Demostrar que, siendo a, b, c y d reales, las raíces de la ecuación $\begin{vmatrix} a-x & c+di \\ c-di & b-x \end{vmatrix} = 0$ serán reales.

42*. Mostrar que el valor de la fracción $\frac{ax+b}{cx+d}$, en la cual por lo menos uno de los números c, d difiere de cero, no depende del valor de x cuando y sólo cuando $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0.$

Calcular los determinantes de tercer orden:

43. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$

44. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$

45. $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}.$

46. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$

47. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}.$

48. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$

49. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$. 50. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. 51. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$. 52. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

53. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$. 54. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$. 55. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. 56. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

57. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$. 58. $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$. 59. $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$.

60. $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$. 61. $\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}$.

62. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha\cos\beta & \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\ 0 & -\operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$. 63. $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta & 1 \\ \operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$.

64. Para qué condición es válida la igualdad

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 0 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix}.$$

65. Mostrar que el determinante

$$\begin{vmatrix} a^2 & b\operatorname{sen}\alpha & c\operatorname{sen}\alpha \\ b\operatorname{sen}\alpha & 1 & \cos\alpha \\ c\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

y otros dos determinantes obtenidos del dicho mediante la permutación cíclica de los elementos a, b, c y α, β, γ, son nulos si a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo y α, β, γ, sus ángulos, opuestos a los lados a, b, c, respectivamente.

Calcular los determinantes de tercer orden en los cuales $i = \sqrt{-1}$:

66. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}$. 67. $\begin{vmatrix} x & a+bi & c+di \\ a-bi & y & e+fi \\ c-di & e-fi & z \end{vmatrix}$.

68. $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix}$, donde $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

69. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{vmatrix}$, donde $\varepsilon = \cos\frac{2}{3}\pi + i\operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi$

70. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix}$, donde $\varepsilon = \cos\frac{4}{3}\pi + i\operatorname{sen}\frac{4}{3}\pi$.

71. Demostrar que si todos los elementos del determinante de tercer orden son iguales a ± 1, el propio determinante será un número par.

72*. Hallar el valor máximo que puede tomar el determinante de tercer orden a condición de que todos sus elementos sean iguales a ± 1.

73*. Hallar el valor máximo del determinante de tercer orden a condición de que todos sus elementos sean iguales a $+1$ ó 0.

Resolver los sistemas de ecuaciones, empleando los determinantes:

74. $2x + 3y + 5z = 10,\quad 3x + 7y + 4z = 3,\quad x + 2y + 2z = 3.$

75. $5x - 6y + 4z = 3,\quad 3x - 3y + 2z = 2,\quad 4x - 5y + 2z = 1.$

76. $4x - 3y + 2z + 4 = 0,\quad 6x - 2y + 3z + 1 = 0,\quad 5x - 3y + 2z + 3 = 0.$

77. $5x + 2y + 3z + 2 = 0,\quad 2x - 2y + 5z = 0,\quad 3x + 4y + 2z + 10 = 0.$

78*. $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + 2 = 0,\quad -\frac{2y}{b} + \frac{3z}{c} - 1 = 0,\quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0.$

79. $2ax - 3by + cz = 0,\quad 3ax - 6by + 5cz = 2abc,\quad 5ax - 4by + 2cz = 3abc$, donde $abc \neq 0$.

80*. $4bcx + acy - 2abz = 0,$
$5bcx + 3acy - 4abz + abc = 0,$
$3bcx + 2acy - abz - 4abc = 0,$ donde $abc \neq 0$.

81*. Resolver el sistema de ecuaciones:

$x + y + z = a,$
$x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z = b,$
$x + \varepsilon^2 y + \varepsilon z = c.$

(ε es un valor de $\sqrt[3]{1}$ diferente de la unidad).

Investigar si el sistema de ecuaciones es determinado, indeterminado o contradictorio:

82. $2x - 3y + z = 2,\quad 3x - 5y + 5z = 3,\quad 5x - 8y + 6z = 5.$

83. $4x + 3y + 2z = 1,\quad x + 3y + 5z = 1,\quad 3x + 6y + 9z = 2.$

84. $5x - 6y + z = 4,\quad 3x - 5y - 2z = 3,\quad 2x - y + 3z = 5.$

85. $2x - y + 3z = 4,\quad 3x - 2y + 2z = 3,\quad 5x - 4y = 2.$

86. $2ax - 23y + 29z = 4,\quad 7x + ay + 4z = 7,\quad 5x + 2y + az = 5.$

87. $ax - 3y + 5z = 4,\quad x - ay + 3z = 2,\quad 9x - 7y + 8az = 0.$

88. $ax + 4y + z = 0,\quad 2y + 3z - 1 = 0,\quad 3x - bz + 2 = 0.$

89. $ax + 2z = 2,\quad 5x + 2y = 1,\quad x - 2y + bz = 3.$

Por medio del cálculo directo, según la regla de los triángulos o según la regla de Sarrus, demostrar las siguientes propiedades de los determinantes de tercer orden:

90. Si en el determinante de tercer orden las filas y las columnas cambian de papel (o como suele decirse, se transpone su matriz), el determinante no variará.

91. Si todos los elementos de cualquier fila (o columna) son nulos, el propio determinante también es igual a cero.

92. Si todos los elementos de cualquier fila (o columna) del determinante se multiplican por un mismo número, todo el determinante también se multiplicará por ese mismo número.

93. Si se permutan dos filas (o dos columnas) del determinante, éste cambiará de signo.

94. Si dos filas (o dos columnas) del determinante son iguales, éste es igual a cero.

95. Si todos los elementos de una fila son proporcionales a los correspondientes elementos de otra fila, el determinante es nulo (lo mismo es justo también para las columnas).

96. Si cada elemento de cierta fila del determinante está representado en forma de una suma de dos sumandos, el determinante será igual a la suma de dos determinantes, en este caso todas las filas, menos la indicada, quedarán las mismas, y en la fila dicha del primer determinante se encontrarán los primeros sumandos, y en la del segundo, los segundos (lo mismo es cierto para las columnas).

97. Si a los elementos de una fila del determinante se les añaden los correspondientes elementos de otra fila, multiplicados por un mismo número, el determinante no cambia (lo mismo es válido para las columnas).

98. Se dice que una fila del determinante es una *combinación lineal* de las demás filas, si cada elemento de dicha fila es igual a la suma de los productos de los correspondientes elementos de las demás filas multiplicados por ciertos números, constantes para cada fila, es decir, que no dependen del número del elemento en la fila. De modo análogo se determina la combinación lineal de las columnas. Por ejemplo: la tercera fila del determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

será una combinación lineal de las primeras dos, si existen dos números c_1 y c_2 tales que $a_{3j} = c_1 a_{1j} + c_2 a_{2j}$ $(j = 1, 2, 3)$.

Demostrar que si una fila (columna) del determinante de tercer orden es una combinación lineal de las demás filas (columnas), el determinante será igual a cero.

Observación. Es válida también la afirmación inversa, pero ella se desprende del posterior desarrollo de la teoría de los determinantes.

99*. Usando el problema anterior, demostrar en un ejemplo que para que el determinante de tercer orden sea nulo, a diferencia de los determinantes de segundo orden (véase el problema 38), ya no es necesaria la proporcionalidad de dos filas (o columnas).

Aplicando las propiedades de los determinantes de tercer orden, indicadas en los problemas 91—98, calcular los siguientes determi-

nantes:

100. $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \operatorname{sen}^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \operatorname{sen}^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$. **101.** $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos^2\alpha \\ \operatorname{sen}^2\beta & \cos 2\beta & \cos^2\beta \\ \operatorname{sen}^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$.

102. $\begin{vmatrix} x & x' & ax+bx' \\ y & y' & ay+by' \\ z & z' & az+bz' \end{vmatrix}$. **103.** $\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^2 & a_1^2+b_1^2 & a_1b_1 \\ (a_2+b_2)^2 & a_2^2+b_2^2 & a_2b_2 \\ (a_3+b_3)^2 & a_3^2+b_3^2 & a_3b_3 \end{vmatrix}$.

104. $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$. **105.** $\begin{vmatrix} (a^x+a^{-x})^2 & (a^x-a^{-x})^2 & 1 \\ (b^y+b^{-y})^2 & (b^y-b^{-y})^2 & 1 \\ (c^z+c^{-z})^2 & (c^z-c^{-z})^2 & 1 \end{vmatrix}$.

106. $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix}$, donde ε es un valor de $\sqrt[3]{1}$ diferente de la unidad.

107. $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & \operatorname{sen}(\alpha+\delta) \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta & \operatorname{sen}(\beta+\delta) \\ \operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma & \operatorname{sen}(\gamma+\delta) \end{vmatrix}$. **108.** $\begin{vmatrix} a_1+b_1i & a_1i-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2i & a_2i-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3i & a_3i-b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, donde $i=\sqrt{-1}$.

109. $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} & \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} & 1 \end{vmatrix}$ (dar una interpretación geométrica del resultado obtenido).

110*. $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix}$, donde α, β y γ son las raíces de la ecuación $x^3+px+q=0$.

Sin desarrollar los determinantes, demostrar las siguientes identidades:

111. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

112. $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

113. $\begin{vmatrix} a_1+b_1i & a_1i+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2i & a_2i+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3i & a_3i+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

114. $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

115. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

116. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

117. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$.

118. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+ac+bc)(b-a)(c-a)(c-b).$

119. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)$
$(b-a)(c-a)(c-b).$

120*. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$

121. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$

122. $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+bc+ca)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$

§ 2. Permutaciones y sustituciones

Definir la cantidad de inversiones en las permutaciones (si no hay indicaciones determinadas, a título de la disposición inicial se toma siempre la siguiente: 1, 2, 3, . . . en orden creciente):

123. 2, 3, 5, 4, 1. **124.** 6, 3, 1, 2, 5, 4.

125. 1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8. **126.** 7, 5, 6, 4, 1, 3, 2.

127. 1, 3, 5, 7, . . ., $2n-1$, 2, 4, 6, 8, . . ., $2n$.

128. 2, 4, 6, . . ., $2n$, 1, 3, 5, . . ., $2n-1$.

En las siguientes permutaciones definir el número de las inversiones y señalar el criterio común de los números n para los cuales dicha permutación es par y aquéllos, para los que es impar:

129. 1, 4, 7, . . ., $3n-2$, 2, 5, 8, . . ., $3n-1$, 3, 6, 9, . . ., $3n$.

130. 3, 6, 9, . . ., $3n$, 2, 5, 8, . . ., $3n-1$, 1, 4, 7, . . ., $3n-2$.

131. 2, 5, 8, . . ., $3n-1$, 3, 6, 9, . . ., $3n$, 1, 4, 7, . . ., $3n-2$.

132. 2, 5, 8, . . ., $3n-1$, 1, 4, 7, . . ., $3n-2$, 3, 6, 9, . . ., $3n$.

133. 1, 5, . . ., $4n-3$, 2, 6, . . ., $4n-2$, 3, 7, . . ., $4n-1$, 4, 8, . . ., $4n$.

134. 1, 5, . . ., $4n-3$, 3, 7, . . ., $4n-1$, 2, 6, . . ., $4n-2$, 4, 8, . . ., $4n$.

135. $4n$, $4n-4$, . . ., 8, 4, $4n-1$, $4n-5$, . . ., 7, 3, $4n-2$, $4n-6$, . . ., 6, 2, $4n-3$, $4n-7$, . . ., 5, 1.

136. ¿En qué permutación de los números 1, 2, . . ., n la cantidad de inversiones será la máxima y cuál será su valor?

137. ¿Cuántas inversiones formará el número 1 que se encuentra en el lugar k de la permutación?

138. ¿Cuántas inversiones formará el número n que se halla en el lugar k en la permutación de los números 1, 2, 3, . . ., n?

139. ¿Cuál será la suma del número de inversiones y del número de órdenes en cualquier permutación de los números 1, 2, . . ., n?

140. ¿Para qué números n la paridad de la cantidad de inversiones

y del número de órdenes en todas las permutaciones de los números 1, 2, . . ., n es igual y para cuáles será inversa?

141*. Demostrar que la cantidad de inversiones en la permutación $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es igual al número de inversiones en la permutación de los índices 1, 2, . . ., n que se obtiene, al sustituir dicha permutación por la disposición inicial.

142*. Mostrar que de una permutación de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a otra permutación de $b_1, b_2, \ldots, b_n$ de los mismos elementos puede pasarse mediante no más de $n-1$ transposiciones.

143*. Dar un ejemplo de la permutación de los números 1, 2, 3, ..., n que no se puede reducir a una disposición normal mediante menos de $n-1$ transposiciones y demostrar eso.

144*. Mostrar que de una permutación de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a cualquiera otra permutación $b_1, b_2, \ldots, b_n$ de los mismos elementos se puede pasar aplicando no más de $\frac{n(n-1)}{2}$ transposiciones contiguas (es decir, transposiciones de los elementos adyacentes).

145*. Se da que el número de inversiones en la permutación de $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ es igual a k. ¿Cuántas inversiones habrá en la permutación de $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$?

146*. ¿Cuántas inversiones hay en todas las permutaciones de n elementos en total?

147*. Demostrar que de cualquier permutación de los números 1, 2, . . ., n que contiene k inversiones se puede pasar a la disposición inicial aplicando k transposiciones contiguas, pero no se puede hacerlo con un número inferior de tales transposiciones.

148*. Demostrar que para cualquier número entero k $(0 \leqslant k \leqslant C_n^2)$, existe una permutación de números 1, 2, 3, . . ., n, cuyo número de inversiones es igual a k.

149*. Designemos por (n, k) el número de permutaciones de los números 1, 2, . . ., n, cada una de las cuales contiene precisamente k inversiones. Deducir para el número (n, k) la relación recurrente: $(n+1, k) = (n, k) + (n, k-1) + (n, k-2) + \ldots + (n, k-n)$, en la que debe ponerse $(n, j) = 0$ para $j > C_n^2$ y para $j < 0$. Empleando esta relación, componer la tabla de los números (n, k) para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ y $k = 0, 1, 2, \ldots, 15$.

150*. Mostrar que el número de permutaciones de los números 1, 2, . . ., n, que contienen k inversiones, es igual a la cantidad de permutaciones de los mismos números que contienen $C_n^2 - k$ inversiones.

Desarrollar las siguientes sustituciones en el producto de ciclos independientes y definir su paridad por el decremento (o sea, la diferencia entre el número de elementos realmente desplazables y el número de ciclos). Persiguiendo una mayor comodidad de los cálculos, para los números que permanezcan en su sitio puede introducirse la descomposición en ciclos monomiales.

151. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. **152.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

153. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&1&3&6&5&7&4&2\end{pmatrix}$. **154.** $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\5&8&9&2&1&4&3&6&7\end{pmatrix}$.

155. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\2&3&4&5&6&7&8&9&1\end{pmatrix}$. **156.** $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&5&6&1&2&3\end{pmatrix}$.

157. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&\dots&2n-1&2n\\2&1&4&3&\dots&2n&2n-1\end{pmatrix}$.

158. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&\dots&3n-2&3n-1&3n\\3&2&1&6&5&4&\dots&3n&3n-1&3n-2\end{pmatrix}$.

159. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&\dots&2n-3&2n-2&2n-1&2n\\3&4&5&6&\dots&2n-1&2n&1&2\end{pmatrix}$.

160. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&\dots&3n-2&3n-1&3n\\2&3&1&5&6&4&\dots&3n-1&3n&3n-2\end{pmatrix}$.

161. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&\dots&3n-2&3n-1&3n\\4&5&6&7&8&9&\dots&1&2&3\end{pmatrix}$.

162. $\begin{pmatrix}1&2&\dots&k&\dots&nk-k+1&nk-k+2&\dots&nk\\k+1&k+2&\dots&2k&\dots&1&2&\dots&k\end{pmatrix}$.

En las siguientes sustituciones pasar de la anotación en ciclos a la anotación en dos filas:

163. (1 5) (2 3 4). **164.** (1 3) (2 5) (4).

165. (7 5 3 1) (2 4 6) (8) (9).

166. (1 2) (3 4) . . . $(2n-1,\ 2n)$.

167. $(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots,\ 2n-1,\ 2n)$.

168. (3 2 1) (6 5 4) . . . $(3n,\ 3n-1,\ 3n-2)$.

Multiplicar las sustituciones:

169. $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}$.

170. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&5&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&4&1&2\end{pmatrix}$.

171. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&1&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&1&5&2\end{pmatrix}$.

172. $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}^2$. **173.** $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&1&2\end{pmatrix}^3$.

174. Demostrar que si cierto grado del ciclo es igual a la unidad, el índice del grado se divide por la longitud del ciclo. (Se llama longitud del ciclo el número de sus elementos.)

175. Demostrar que entre todos los grados de la sustitución iguales a la unidad, el índice mínimo es igual al mínimo común múltiplo de las longitudes de los ciclos que constituyen el desarrollo de la sustitución.

176*. Hallar A^{100}, donde $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\3&5&4&1&7&10&2&6&9&8\end{pmatrix}$.

177. Hallar A^{150}, donde $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\3&5&4&6&9&7&1&10&8&2\end{pmatrix}$.

178. Hallar la sustitución X de la igualdad $AXB=C$, donde

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&3&2&1&6&5&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&1&2&7&4&5&6\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&1&3&6&4&7&2\end{pmatrix}.$$

179. Demostrar que la multiplicación de la sustitución por la transposición (o sea, por el ciclo de dos términos) (α, β) a izquierda equivale a la transposición (o sea, al cambio de lugares) de los números α y β en la fila superior de la sustitución, y la multiplicación por la misma transposición a derecha equivale a la transposición de α y β en la fila inferior de la sustitución.

180. Demostrar que si los números α y β entran en un ciclo de la sustitución, entonces, al multiplicar esta sustitución por la transposición (α, β) (a izquierda o a derecha) dicho ciclo se descompone en dos ciclos, pero si los números α y β forman parte de distintos ciclos, entonces durante la multiplicación mencionada estos ciclos se unen.

181*. Empleando los dos problemas anteriores, demostrar que la cantidad de inversiones y el decremento de cualquier sustitución tienen la misma paridad.

182*. La sustitución dada se descompone en el producto de transposiciones, demostrar que el número mínimo de las transposiciones es igual a su decremento.

183*. Demostrar que la cantidad mínima de transposiciones que convierte la permutación $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en la permutación $b_1, b_2, \ldots, b_n$ de los mismos elementos es igual al decremento de la sustitución

$$P=\begin{pmatrix}a_1&a_2&\ldots&a_n\\b_1&b_2&\ldots&b_n\end{pmatrix}.$$

184*. Hallar todas las sustituciones de los números 1, 2, 3, 4, conmutativos con la sustitución

$$S=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}.$$

185. Hallar todas las sustituciones de los números 1, 2, 3, 4, 5, conmutativos con la sustitución

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&2&1\end{pmatrix}.$$

186*. Para cualesquiera números enteros x y m, donde $m \neq 0$, designemos por $r(x, m)$ el resto (que se considera no negativo) de la división de x entre m. Demostrar que si $m \geqslant 2$ y a es un número entero, además, a y m son números primos entre sí, la correspondencia de $x \to r(ax, m)$, $x = 1, 2, \ldots, m-1$, es la sustitución de los números $1, 2, \ldots, m-1$.

187. Escribir la sustitución de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, para la cual el número x pasa al resto si $5x$ se divide por 9.

§ 3. Definición y propiedades elementales de los determinantes de cualquier orden

Los problemas de este párrafo intentan explicar el concepto de determinante de cualquier orden y sus propiedades elementales, incluyendo la igualdad a cero del determinante, cuyas filas son linealmente dependientes, y el desarrollo del determinante por la fila.

En los siguientes párrafos se dan los problemas para adquirir hábitos del cálculo de los determinantes con elementos numéricos, problemas referentes a los métodos de cálculo de los determinantes de forma especial, al teorema de Laplace, a la multiplicación de los determinantes, etc.

Aclarar cuáles de los productos, citados más abajo, entran en los determinantes de órdenes correspondientes y con qué signos:

188. $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$. **189.** $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$.

190. $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$. **191.** $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$.

192. $a_{12}a_{23}a_{34} \ldots a_{n-1,n}a_{kk}$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

193. $a_{12}a_{23} \ldots a_{n-1,n}a_{n1}$.

194. $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} \ldots a_{2n-1,2n}a_{2n,2n-1}$.

195. $a_{11}a_{2,n}a_{3,n-1} \ldots a_{n,2}$.

196. $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64} \ldots a_{3n-2,3n}a_{3n-1,3n-1}a_{3n,3n-2}$.

197. Elegir los valores de i y k de modo que el producto

$$a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$$

entre en el determinante de sexto orden con el signo menos.

198. Elegir los valores de i y k de modo que el producto

$$a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$$

entre en el determinante de 7 orden con el signo más.

199. Hallar los términos del determinante de cuarto orden que contienen el elemento a_{32} y entran en el determinante con el signo más.

200. Hallar los términos del determinante

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}, \text{ que contienen } x^4 \text{ y } x^3.$$

201. ¿Con qué signo entra el producto de los elementos de la diagonal principal en el determinante de orden n?

202. ¿Con qué signo entra el producto de los elementos de la diagonal secundaria en el determinante de orden n?

203. Usando sólo la definición, calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

en el cual todos los elementos por un lado de la diagonal principal son nulos.

204. Utilizando sólo la definición, calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,\,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3,\,n-2} & a_{3,\,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,\,n-2} & a_{n,\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix},$$

en el cual todos los elementos por un lado de la diagonal secundaria son nulos.

205. Usando sólo la definición, calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

206. Demostrar que si en el determinante de orden n en la intersección de ciertas k filas y l columnas se encuentran elementos nulos, con la particularidad de que $k + l > n$, el determinante es igual a cero.

207*. Resolver la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = 0,$$

donde $a_1, a_2, \dots, a_n$ son números distintos.

208. Resolver la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix} = 0.$$

209. Hallar el elemento del determinante de orden n simétrico al elemento a_{ik} con respecto a la diagonal secundaria.

210. Hallar el elemento del determinante de orden n, simétrico al elemento a_{ik} con respecto al «centro» del determinante.

211. Denominaremos par o impar el lugar del elemento a_{ik} del determinante en función de si la suma $i + k$ es par o impar. Hallar la cantidad de elementos del determinante de orden n, situados en los lugares pares o impares.

212. ¿De qué modo cambiará el determinante de orden n si la primera columna se permuta al último lugar y las demás columnas se desplazan a la izquierda, conservando su disposición?

213. ¿Cómo cambiará el determinante de orden n si sus filas se escriben en orden inverso?

214. ¿Cómo cambiará el determinante si cada uno de sus elementos se sustituye por un elemento simétrico al dicho con relación al «centro» del determinante?

215*. ¿Cómo cambiará el determinante si cada uno de sus elementos se sustituye por un elemento simétrico al dicho con relación a la diagonal secundaria?

216*. El determinante se denomina *antisimétrico* si los elementos, simétricos respecto a la diagonal principal, se diferencian por el signo, o sea, $a_{ik} = -a_{ki}$ para cualesquiera índices de i, k.

Demostrar que el determinante antisimétrico de orden impar n es igual a cero.

217*. Demostrar que el determinante, cuyos elementos simétricos respecto a la diagonal principal son números complejos conjugados (por ejemplo, reales), es un número real.

218. ¿Para cuales valores de n todos los determinantes de orden n, cuyos elementos satisfacen las condiciones

$$(\alpha)\ a_{jk} \text{ es un número real para } j > k,$$

$$(\beta)\ a_{kj} = ia_{jk} \text{ para } j \geqslant k \ (i = \sqrt{-1}),$$

serán reales?

219. ¿Para qué valores de n todos los determinantes de orden n, cuyos elementos satisfacen las condiciones (α) y (β) del problema anterior, serán imaginarios puros?

220. Mostrar que para n impar, todos los determinantes de orden n, cuyos elementos satisfacen las condiciones (α) y (β) del problema 218, tienen la forma $a(1 \pm i)$, donde a es un número real.

221. ¿Cómo cambiará el determinante de orden n si cada uno de sus elementos varía de signo?

222*. ¿Cómo cambiará el determinante si cada uno de sus elementos a_{ik} se multiplica por c^{i-k}, donde $c \neq 0$?

223*. Demostrar que cada término del determinante consta de un número par de elementos, que ocupan el lugar impar; de un número par de elementos que ocupan el lugar par, si el determinante posee el orden par, y de un número impar, si el determinante es de orden impar.

224*. Demostrar que el determinante no cambiará si varía el signo de todos los elementos en los lugares impares; pero si varía el signo de todos los elementos en los lugares pares, el determinante no cambia, siendo del orden par y cambia, siendo del orden impar.

225. Demostrar que el determinante no cambiará si a cada fila, excepto la última, se le añade la fila siguiente.

226. Demostrar que el determinante no cambiará si a cada columna, a partir de la segunda, se le añade la columna anterior.

227. Demostrar que el determinante no cambiará si de cada fila, excepto la última, se restan todas las siguientes filas.

228. Demostrar que el determinante no cambiará si a cada colum-

na, a partir de la segunda, se le añaden todas las columnas precedentes.

229. ¿Cómo cambiará el determinante si de cada fila, excepto la última, se resta la siguiente fila, y de la última fila se resta la fila primera inicial?

230*. ¿Cómo cambiará el determinante si a cada columna, empezando por la segunda, se le añade la columna anterior, sumando al mismo tiempo la primera columna y la última?

231. ¿Cómo cambiará el determinante de orden n si su matriz gira en 90° alrededor del «centro»?

232. ¿A qué equivale el determinante, cuya suma de las filas con números pares es igual a la suma de las filas con números impares?

233. Hallar la suma de todos los determinantes de orden $n \geqslant 2$, cada uno de los cuales en cada fila y cada columna tiene un elemento igual a la unidad y todos los demás nulos. ¿Cuántos determinantes de ese tipo habrá?

234. Hallar la suma de los determinantes de orden $n \geqslant 2$:

$$\sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{1\alpha_1} & a_{1\alpha_2} & \cdots & a_{1\alpha_n} \\ a_{2\alpha_1} & a_{2\alpha_2} & \cdots & a_{2\alpha_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n\alpha_1} & a_{n\alpha_2} & \cdots & a_{n\alpha_n} \end{vmatrix},$$

donde la suma se toma por todos los valores de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, que varían independientemente el uno del otro desde 1 hasta n.

235. Supongamos que todos los elementos del determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

son números enteros dígitos. Designemos por N_i el número escrito por las cifras de la i-ésima fila del determinante, conservando su disposición (a_{in} es el número de unidades, $a_{i,n-1}$ es el número de decenas, etc.). Demostrar que el valor del determinante se divide por el máximo común divisor de los números $N_1, N_2, \ldots, N_n$.

236. Desarrollando por la tercera fila, calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

237. Desarrollando por la segunda columna, calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

Calcular los determinantes:

238. $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$ **239.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. **240.** $\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$.

241. Sea M_{ij} el menor del elemento a_{ij} del determinante D. Mostrar que si D es un determinante simétrico o un determinante antisimétrico de orden impar, $M_{ij} = M_{ji}$; pero si D es un determinante de orden par, $M_{ij} = -M_{ji}$.

242. Sea D un determinante de orden $n > 1$, D' y D'' determinantes obtenidos de D sustituyendo cada elemento a_{ij} por su complemento algebraico A_{ij} para D' y por su menor M_{ij} para D''. Demostrar que $D' = D''$. El determinante D' se denomina recíproco (o adjunto) a D. De cómo expresar D' por medio de D véase el problema 506.

243. Calcular el siguiente determinante sin desarrollarlo:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}.$$

Sin desarrollar los determinantes, demostrar las siguientes identidades:

244*.
$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

245*.
$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix} =$$
$$= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

246*.
$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{i-1} & a_1^{i+1} & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{i-1} & a_2^{i+1} & \dots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{i-1} & a_n^{i+1} & \dots & a_n^n \end{vmatrix} =$$
$$= \left(\sum_{k_1, k_2, \dots, k_{n-i}} a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_{n-i}} \right) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

donde la suma se toma por todas las $n - i$-ésima combinaciones de n números $1, 2, 3, \dots, n$.

Demostrar las identidades empleando las propiedades de los determinantes, incluyendo el desarrollo por una fila o columna:

247*. $$\begin{vmatrix} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} & \operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2} & \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \cos\frac{\beta-\gamma}{2} & \operatorname{sen}\frac{\beta+\gamma}{2} & \cos\frac{\beta+\gamma}{2} \\ \cos\frac{\gamma-\alpha}{2} & \operatorname{sen}\frac{\gamma+\alpha}{2} & \cos\frac{\gamma+\alpha}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)+\operatorname{sen}(\gamma-\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\gamma)\}.$$

248. $$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}^2\alpha & \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha \\ \operatorname{sen}^2\beta & \operatorname{sen}\beta\cos\beta & \cos^2\beta \\ \operatorname{sen}^2\gamma & \operatorname{sen}\gamma\cos\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix} = \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}(\beta-\gamma)\cos\beta\cos\gamma+ \operatorname{sen}(\gamma-\alpha)\cos\gamma\cos\alpha.$$

249. $$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3.$$

250. $$\begin{vmatrix} \frac{1}{a+x} & \frac{1}{a+y} & 1 \\ \frac{1}{b+x} & \frac{1}{b+y} & 1 \\ \frac{1}{c+x} & \frac{1}{c+y} & 1 \end{vmatrix} = \frac{(a-b)(a-c)(b-c)(x-y)}{(a+x)(b+x)(c+x)(a+y)(b+y)(c+y)}.$$

251. $$\begin{vmatrix} \frac{1}{a+x} & \frac{1}{a+y} & \frac{1}{a+z} \\ \frac{1}{b+x} & \frac{1}{b+y} & \frac{1}{b+z} \\ \frac{1}{c+x} & \frac{1}{c+y} & \frac{1}{c+z} \end{vmatrix} = \frac{(a-b)(a-c)(b-c)(x-y)(x-z)(y-z)}{(a+x)(b+x)(c+x)(a+y)(b+y)(c+y)(a+z)(b+z)(c+z)}.$$

252. $$\begin{vmatrix} a^2+(1-a^2)\cos\varphi & ab(1-\cos\varphi) & ac(1-\cos\varphi) \\ ba(1-\cos\varphi) & b^2+(1-b^2)\cos\varphi & bc(1-\cos\varphi) \\ ca(1-\cos\varphi) & cb(1-\cos\varphi) & c^2+(1-c^2)\cos\varphi \end{vmatrix} = \cos^2\varphi, \text{ siendo } a^2+b^2+c^2=1.$$

253*.

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi-\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi\cos\theta & -\operatorname{sen}\varphi\cos\psi-\cos\varphi\operatorname{sen}\psi\cos\theta & \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta \\ \cos\varphi\operatorname{sen}\psi+\operatorname{sen}\varphi\cos\psi\cos\theta & -\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi+\cos\varphi\cos\psi\cos\theta & -\cos\psi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & \cos\varphi\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1.$$

254. $$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

255. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac + 2d.$

256*. $$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & -1 & 1 & z \\ 1 & 1 & 1 & -1 & u \\ x & y & z & u & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= -4\,[x^2 + y^2 + z^2 + u^2 - 2\,(xy + xz + xu + yz + yu + zu)].$$

§ 4. Cálculo de los determinantes con elementos numéricos

Calcular los determinantes:

257. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$

258. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$

259. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$

260. $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}.$

261. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$

262. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$

263. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$

264. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$

265. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$

266. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$

267. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$

268. $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}.$

269. $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$

270. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$

271. $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.   272. $\begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix}$.

273. $\begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}$.   274. $\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$.

275. $\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$.   276*. $\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{2} \\ 3 & -12 & \frac{21}{5} & 15 \\ \frac{2}{3} & -\frac{9}{2} & \frac{4}{5} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix}$.

277. $\begin{vmatrix} \frac{3}{4} & 2 & -\frac{1}{2} & -5 \\ 1 & -2 & \frac{3}{2} & 8 \\ \frac{5}{6} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{14}{3} \\ \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{2} & \frac{12}{5} \end{vmatrix}$.   278. $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$.

§ 5. Métodos de cálculo de los determinantes de orden n

Introducción. El método de cálculo de los determinantes con elementos numéricos que consiste en anular todos los elementos de cierta fila (columna), excepto una, y en reducir posteriormente el orden, se hace muy voluminoso para los determinantes de un orden dado con elementos literales. En un caso general este camino conduce a la expresión, que se obtiene al calcular el determinante aplicando directamente su definición. Dicho método es aún más incómodo para un determinante con elementos numéricos o literales y un orden n arbitrario.

No existe un método común para calcular semejantes determinantes (si no se toma en consideración la expresión del determinante que se da en su definición). A los determinantes de uno u otro tipo especial se les aplican diversos métodos de cálculo que conducen a expresiones más elementales (o sea, que contienen una cantidad menor de operaciones) que la expresión del determinante según su definición. Examinaremos algunos de esos métodos, los más usados, luego, con fin de asimilarlos mejor, citaremos problemas para cada uno de los citados métodos, y a continuación, problemas, para los cuales el estudiante tendrá que elegir individualmente el método de resolución. Para facilitar la orientación en el material, los problemas relacionados con el teorema de Laplace y la multiplicación de los determinantes, están reunidos en párrafos apartes.

1. Método de reducción a la forma triangular. Este método consiste en transformar el determinante de tal forma que todos los elementos, a un lado de una de las diagonales, sean nulos. El caso de la diagonal secundaria, invirtiendo el orden de las filas (o columnas), se reduce al caso de la diagonal principal. El determinante obtenido es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Ejemplo 1. Calcular el determinante de orden n:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Sustraemos la primera fila de todas las demás:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}.$$

Ejemplo 2. Calcular el determinante

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Sustraemos la primera fila de todas las demás:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & x & x & & x \\ x-a_1 & a_2-x & 0 & & 0 \\ x-a_1 & 0 & a_3-x & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x-a_1 & 0 & 0 & \dots & a_n-x \end{vmatrix}.$$

De la primera columna sacamos a_1-x, de la segunda, a_2-x, . . ., de la n-ésima columna, a_n-x:

$$D=(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x)\times$$

$$\times\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \dots & \frac{x}{a_n-x} \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Supongamos que $\frac{a_1}{a_1-x}=1+\frac{x}{a_1-x}$ y añadamos todas las columnas a la primera:

$$D=(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x)\times$$

$$\times\begin{vmatrix} 1+\frac{x}{a_1-x}+\dots+\frac{x}{a_n-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \dots & \frac{x}{a_n-x} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=x(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1-x}+\frac{1}{a_2-x}+\dots+\frac{1}{a_n-x}\right).$$

2. Método de separación de los factores lineales. El determinante se considera como un polinomio de una o varias letras que entran en éste. Al transformarlo, se ve que se divide en unos cuantos factores lineales, lo que significa (si esos factores son primos entre sí) que se divide también en su producto.

Al comparar algunos términos del determinante con los términos del producto de los factores lineales, se encuentra el cociente de la división del determinante por ese producto y, de ese modo, se halla la expresión para el determinante.

Ejemplo 3. Calcular el determinante

$$D=\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}.$$

Si a la primera columna se le añaden todas las demás, se ve que el determinante se divide por $x+y+z$; si a la primera columna se le añade la segunda y se restan la tercera y cuarta columnas, aparece el factor $y+z-x$; si a la primera columna se le añade la tercera y se sustraen la segunda y cuarta columnas, surge el factor $x-y+z$; por fin, si a la primera columna se le añade la cuarta y se sustraen la segunda y tercera columnas, sale el factor $x+y-z$. Considerando que x, y, z son incógnitas independientes, hacemos la conclusión de que todos esos cuatro factores son primos entre sí de dos en dos lo que significa que el determinante se divide por su producto $(x+y+z)(y+z-x)\times$ $\times(x-y+z)(x+y-z)$.

Este producto contiene el término z^4 con el coeficiente -1, mientras que el propio determinante tiene el mismo término z^4 con el coeficiente $+1$. Entonces,

$$D=-(x+y+z)(y+z-x)(x+z-y)(x+y-z)=$$
$$=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2.$$

Ejemplo 4. Aplicando el método de separación de los factores lineales, calcular el determinante de Vandermonde de orden n:

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Considerando D_n como un polinomio de una incógnita x_n con coeficientes dependientes de $x_1, \dots, x_{n-1}$, vemos que se anula para $x_n=x_1$, $x_n=x_2$, ..., $x_n=x_{n-1}$, y por eso se divide por x_n-x_1, x_n-x_2, ..., x_n-x_{n-1}.

Todos esos factores son primos entre sí (ya que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son independientes desde el punto de vista algebraico). Por consiguiente, D_n se divide por su producto, es decir,

$$D_n = q(x_1, x_2, \ldots, x_n)(x_n - x_1)(x_n - x_2) \ldots (x_n - x_{n-1}).$$

Al descomponer D_n por la última fila, vemos que éste es un polinomio de grado $n-1$ con respecto a x_n, con la particularidad de que el coeficiente de x_n^{n-1} es igual al determinante de Vandermonde D_{n-1} compuesto de incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$; como el producto del paréntesis en el segundo miembro de la última igualdad contiene x_n^{n-1} con el coeficiente 1, el polinomio $q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ no posee el término x_n, y comparando los coeficientes de x_n^{n-1} en ambos miembros de la igualdad, obtenemos $D_{n-1} = q(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, de donde $D_n = D_{n-1}(x_n - x_1)(x_n - x_2) \ldots (x_n - x_{n-1})$. Aplicando esta igualdad y sustituyendo n por $n-1$, obtenemos

$$D_{n-1} = D_{n-2}(x_{n-1} - x_1) \ldots (x_{n-1} - x_{n-2}).$$

Ponemos esta expresión para D_{n-1} en la anterior para D_n. Repitiendo dicho razonamiento, separaremos, por fin, el factor $x_2 - x_1$, después de lo que llegaremos al determinante de Vandermonde de primer orden $D_1 = 1$.

De esta manera,

$$D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \ldots (x_n - x_1) \ldots (x_n - x_2) \ldots (x_n - x_{n-1}) = \prod_{i>j} (x_i - x_j).$$

3. Método de relaciones recurrentes (recursivas). Este método consiste en que el determinante dado se expresa, transformándolo y descomponiéndolo por una fila o columna, mediante los determinantes de la misma forma pero de un orden más inferior. La igualdad obtenida se denomina relación recurrente.

Después se calculan directamente, por la forma general del determinante, la cantidad de determinantes de órdenes inferiores tantos, cuantos había en el segundo miembro de la relación recurrente. Los determinantes de orden más elevado se calculan sucesivamente de la relación recurrente. Si hay que obtener una expresión para un determinante de cualquier orden n, entonces, calculando varios determinantes de órdenes inferiores a partir de la relación recurrente, se tiende a advertir la forma general de la expresión buscada y luego se demuestra la validez de ésa para cualquier n mediante la relación recurrente y el método de inducción por n.

La expresión general puede obtenerse también de otra manera. Para ello en la relación recurrente que denota el determinante de orden n se pone la expresión del determinante de orden $(n-1)$ de la misma relación recurrente, sustituyendo n por $n-1$, luego se pone la expresión análoga del determinante de orden $(n-2)$, etc., hasta que se aclare la forma de la expresión general buscada del determinante de orden n. Pueden también combinarse ambas vías, utilizando la segunda para encontrar la expresión buscada y demostrando luego mediante la inducción por n la validez de esa expresión. El método de relaciones recurrentes es el más eficaz entre los métodos analizados aquí y se aplica a determinantes más complejos.

Antes de pasar a los ejemplos de cálculo de los determinantes empleando el método de relaciones recurrentes, examinemos un caso particular de éste en el que la relación recurrente ofrece el algoritmo para resolver el problema, excluyendo el elemento de suposición que existe en el caso general. Sea que la relación recurrente tiene el siguiente aspecto

$$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}, \quad n > 2, \tag{1}$$

donde p, q son constantes, o sea, magnitudes independientes de n[1].

---

[1]) Este método se le comunicó al autor K. Ya. Ókunev. Se aplica también a la relación recurrente $D_n = p_1 D_{n-1} + \ldots + p_k D_{n-k}$, siendo $p_1, \ldots, p_k$ constantes y k cualquiera, pero a causa de que los razonamientos son muy voluminosos, nos limitaremos sólo a $k = 2$.

Para $q = 0$ D_n se calcula como término de la progresión geométrica: $D_n = p^{n-1}D_1$; aquí D_1 es el determinante de primer orden de la forma dada, es decir, es el elemento del determinante D_n que se encuentra en el ángulo superior izquierdo.

Sea $q \neq 0$ y α, β, raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - px - q = 0$. Entonces $p = \alpha + \beta$, $q = -\alpha\beta$ y la igualdad (1) puede escribirse de la siguiente manera:

$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha (D_{n-1} - \beta D_{n-2}), \tag{2}$$

ó

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta (D_{n-1} - \alpha D_{n-2}). \tag{3}$$

Supongamos primero que $\alpha \neq \beta$.

Partiendo de las igualdades (2) y (3) por la fórmula para el término $(n-1)$ de la progresión geométrica, hallamos

$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^{n-2} (D_2 - \beta D_1) \text{ y}$$

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^{n-2} (D_2 - \alpha D_1),$$

de donde

$$D_n = \frac{\alpha^{n-1} (D_2 - \beta D_1) - \beta^{n-1} (D_2 - \alpha D_1)}{\alpha - \beta},$$

$$\text{ó } D_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n, \text{ donde } C_1 = \frac{D_2 - \beta D_1}{\alpha(\alpha - \beta)},$$

$$C_2 = -\frac{D_2 - \alpha D_1}{\beta(\alpha - \beta)}. \tag{4}$$

La última expresión para D_n se aprende fácilmente. Se deducía para $n > 2$, pero se verifica directamente para $n = 1$ y $n = 2$. El valor de C_1 y C_2 puede hallarse no de las expresiones citadas (4), sino de las condiciones iniciales $D_1 = C_1\alpha + C_2\beta$, $D_2 = C_1\alpha^2 + C_2\beta^2$.

Sea ahora $\alpha = \beta$. Las igualdades (2) y (3) se hacen idénticas

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha (D_{n-1} - \alpha D_{n-2}),$$

de donde

$$D_n - \alpha D_{n-1} = A\alpha^{n-2}, \tag{5}$$

donde

$$A = D_2 - \alpha D_1.$$

Sustituyendo aquí n por $n - 1$, obtenemos: $D_{n-1} - \alpha D_{n-2} = A\alpha^{n-3}$, de donde $D_{n-1} = \alpha D_{n-2} + A\alpha^{n-3}$. Poniendo dicha expresión en la igualdad (5), encontramos que: $D_n = \alpha^2 D_{n-2} + 2A\alpha^{n-2}$. Después de repetir ese procedimiento varias veces, obtenemos $D_n = \alpha^{n-1}D_1 + (n-1)A\alpha^{n-2}$ ó $D_n = \alpha^n [(n-1) \times C_1 + C_2]$, donde $C_1 = \frac{A}{\alpha^2}$, $C_2 = \frac{D_1}{\alpha}$ (en este caso $\alpha \neq 0$ ya que $q \neq 0$).

Ejemplo 5. Calcular el determinante del ejemplo 2 por el método de relaciones recurrentes.

Al representar el elemento del ángulo inferior derecho en forma de $a_n = x + (a_n - x)$, podemos dividir el determinante D_n en la suma de dos determinantes:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x & x \\ x & a_2 & \dots & x & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & \dots & a_{n-1} & x \\ x & x & \dots & x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x & 0 \\ x & a_2 & \dots & x & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & \dots & a_{n-1} & 0 \\ x & x & \dots & x & a_n - x \end{vmatrix}$$

En el primer determinante la última columna la sustraemos de las demás, mientras que el segundo determinante lo descomponemos por la última columna:

$$D_n = x(a_1 - x)(a_2 - x) \dots (a_{n-1} - x) + (a_n - x) D_{n-1}.$$

Esta es precisamente la relación recurrente. Introduciendo en ella la expresión análoga para D_{n-1}, hallaremos

$$D_n = x(a_1 - x)(a_2 - x) \dots (a_{n-1} - x) + x(a_1 - x)(a_2 - x) \dots$$
$$\dots (a_{n-2} - x)(a_n - x) + D_{n-2}(a_{n-1} - x)(a_n - x).$$

Al repetir el mismo razonamiento $(n-1)$ veces y observando que $D_1 = a_1 = x + (a_1 - x)$, obtenemos

$$D_n = x(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_{n-1}-x) + x(a_1-x)\dots$$
$$\dots(a_{n-2}-x)(a_n-x)+\dots+x(a_2-x)\dots(a_n-x)+(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x)=$$
$$= x(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1-x}+\dots+\frac{1}{a_n-x}\right),$$

lo que coincide con el resultado del ejemplo 2.

Ejemplo 6. Calcular el determinante de orden n:

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Descomponiendo por la primera fila, hallemos la relación recurrente

$$D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}.$$

La ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ tiene raíces $\alpha = 2$, $\beta = 3$.

Aplicando la fórmula (4), $D_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

4. Método de representación del determinate en forma de suma de determinantes. Algunos determinantes se calculan fácilmente, descomponiéndolos en suma de determinantes del mismo orden respecto a las filas (o a las columnas).

Ejemplo 7. Calcular el determinante

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

Este determinante se descompone con respecto a la primera fila en dos, cada uno de los cuales se descompone, de nuevo, con relación a la segunda fila, en dos determinantes, etc. Al llegar a la última fila, obtenemos 2^n determinantes.

Si en cada descomposición tomamos como primeros sumandos los números a_i y como segundos, los números b_j, las filas de los determinantes obtenidos serán bien de tipo $a_i, a_i, \dots, a_i$, o bien de tipo $b_1, b_2, \dots, b_n$. Dos filas del primer tipo son proporcionales y las del segundo tipo, iguales. Para $n > 2$ cada determinante obtenido adquiere por lo menos dos filas de un mismo tipo y se anula. Así, pues, $D_n = 0$ para $n > 2$.

Prosiguiendo,

$$D_1 = a_1 + b_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = (a_1 - a_2)(b_2 - b_1).$$

5. Método de variación de los elementos de un determinante. Este método se aplica cuando al cambiar todos los elementos del determinante por un mismo número, se reduce a una forma, para la cual se calculan fácilmente los cofactores* de todos los elementos. El método se basa en la siguiente propiedad: si a todos los elementos del determinante D se les añade un mismo número x, el determinante aumentará en el producto del número x por la suma de los cofactores de todos los elementos del determinante D. En efecto, sean

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad D'=\begin{vmatrix} a_{11}+x & \dots & a_{1n}+x \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix}.$$

Descompongamos D' en dos determinantes con respecto a la primera fila, cada uno de ellos en dos determinantes con respecto a la segunda fila, etc.

Los sumandos que contienen más de una fila de elementos, iguales a x, son iguales a cero.

Los sumandos con una fila de elementos iguales a x, los descomponemos por esa fila. Entonces obtenemos: $D' = D + x \sum\limits_{i,\,j=1} A_{ij}$, lo que se requería.

Así, pues, el cálculo del determinante D' se reduce a la deducción del determinante D y de la suma de sus complementos algebraicos.

Ejemplo 8. Calcular el determinante D_n del ejemplo 2.

Después de restar el número x de todos sus elementos, recibiremos el determinante

$$D=\begin{vmatrix} a_1-x & 0 & 0 \\ 0 & a_2-x & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & a_n-x \end{vmatrix}.$$

Los cofactores de los elementos D, no yacentes en la diagonal principal, son nulos, y de cada elemento en la diagonal principal son iguales al producto de los demás elementos de la diagonal principal. Por eso

$$D_n = (a_1-x)\dots(a_n-x)+x\sum_{i=1}^{n}(a_1-x)\dots(a_{i-1}-x)(a_{i+1}-x)\dots(a_n-x)=$$

$$=x(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1-x}+\dots+\frac{1}{a_n-x}\right).$$

Calcular los siguientes determinantes, reduciéndolos a la forma triangular[1]):

279. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$ **280.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}.$

---

* También se llama adjunto y complemento algebraico. *N. del Tr.*)

[1]) Siempre que por el aspecto del determinante es imposible saber su orden, se supone que éste es igual a n.

281. $\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}$.

282. $\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1-b_1 & a_1 \\ a_2 & \dots & a_2-b_2 & a_2 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n-b_n & \dots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}$.

283. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$.

284. $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$.

285*. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix}$.

286. Calcular el determinante de orden n, cuyos elementos se prefijan por las condiciones $a_{ij} = \text{mín}\,(i, j)$.

287. Calcular el determinante de orden n, cuyos elementos se dan por las condiciones $a_{ij} = \text{máx}\,(i, j)$.

288*. Calcular el determinante de orden n, cuyos elementos se dan por las condiciones $a_{ij} = |\,i - j\,|$.

Calcular los siguientes determinantes con ayuda del método de separación de los factores lineales:

289. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix}$.

290. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n+1-x \end{vmatrix}$.

291. $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & x \end{vmatrix}$.

292. $\begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}$.

293. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$.

294*. $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$.

Calcular los siguientes determinantes aplicando el método de relaciones recurrentes:

295*. $\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \dots & a_nb_n \end{vmatrix}$.

296*. $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix}$. **297.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$.

298. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{vmatrix}$. **299.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$.

300. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}$. **301.** $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix}$.

302. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}$. **303.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

304. $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

Calcular los determinantes aplicando el método de representación de éstos en forma de suma de determinantes:

305*. $\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x+a_n \end{vmatrix}$. **306*.** $\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & x_n \end{vmatrix}$.

307*. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_3 & x_3 & x_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & a_n \end{vmatrix}$. **308.** $\begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & x_3 & \dots & a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}$.

Calcular los determinantes[1]:

309. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$,

310. $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & & a_n+b_n \end{vmatrix}$.

311. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 3 & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & n-1 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

312. $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$.

313. $\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$.

314. $\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix}$.

315. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -n & \dots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

316. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

317. $\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}$.

318. $\begin{vmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

319. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}$.

320. $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}$.

---

[1]) En todos los casos en que no queda claro el orden del determinante, considérese igual a n.

321. $$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix}.$$

322. $$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

323. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}.$$

324. $$\begin{vmatrix} n & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

325. $$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^n \\ a_{11} & 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & x & \dots & x^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

326. $$\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^{n-1} & C_n^n \\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \dots & C_{n-1}^{n-1} & 0 \\ 1 & C_{n-2}^1 & C_{n-2}^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & C_1^1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$

327. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}.$$

328. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & \dots & (n+1)^n \end{vmatrix}.$$

329. $$\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \dots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \dots & (a-n)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a-1 & \dots & a-n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

330. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \dots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & \dots & x_n^2+x_n \\ x_1^3+x_1^2 & x_2^3+x_2^2 & \dots & x_n^3+x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1}+x_2^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

331. $\begin{vmatrix} (x+a_1)^n & (x+a_1)^{n-1} & \dots & x+a_1 & 1 \\ (x+a_2)^n & (x+a_2)^{n-1} & \dots & x+a_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x+a_{n+1})^n & (x+a_{n+1})^{n-1} & \dots & x+a_{n+1} & 1 \end{vmatrix}.$

332. $\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{sen}\varphi_1 & \operatorname{sen}^2\varphi_1 & \dots & \operatorname{sen}^{n-1}\varphi_1 \\ 1 & \operatorname{sen}\varphi_2 & \operatorname{sen}^2\varphi_2 & \dots & \operatorname{sen}^{n-1}\varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \operatorname{sen}\varphi_n & \operatorname{sen}^2\varphi_n & \dots & \operatorname{sen}^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix}.$

333. $\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_1 & \cos^2\varphi_1 & \dots & \cos^{n-1}\varphi_1 \\ 1 & \cos\varphi_2 & \cos^2\varphi_1 & \dots & \cos^{n-1}\varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos\varphi_n & \cos^2\varphi_n & \dots & \cos^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix}.$

334. $\begin{vmatrix} 1 & \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \dots & \varphi_{n-1}(x_1) \\ 1 & \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_{n-1}(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \dots & \varphi_{n-1}(x_n) \end{vmatrix},$

donde $\varphi_k(x) = x^k + a_{k1}x^{k-1} + a_{k2}x^{k-2} + \dots + a_{kk}$.

335. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ f_1(\cos\varphi_1) & f_1(\cos\varphi_2) & \dots & f_2(\cos\varphi_n) \\ f_2(\cos\varphi_1) & f_2(\cos\varphi_2) & \dots & f_2(\cos\varphi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-1}(\cos\varphi_1) & f_{n-1}(\cos\varphi_2) & \dots & f_{n-1}(\cos\varphi_n) \end{vmatrix},$

donde $f_k(x) = a_{k0}x^k + a_{k1}x^{k-1} + a_{k2}x^{k-2} + \dots + a_{kk}$.

336. $\begin{vmatrix} 1 & C^1_{x_1} & C^2_{x_1} & \dots & C^{n-1}_{x_1} \\ 1 & C^1_{x_2} & C^2_{x_2} & \dots & C^{n-1}_{x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C^1_{x_n} & C^2_{x_n} & \dots & C^{n-1}_{x_n} \end{vmatrix},$

donde $C^k_x = \dfrac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)}{k!}$.

337. $\begin{vmatrix} (2n-1)^n & (2n-2)^n & \dots & n^n & (2n)^n \\ (2n-1)^{n-1} & (2n-2)^{n-1} & \dots & n^{n-1} & (2n)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2n-1 & 2n-2 & \dots & n & 2n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

338. $\begin{vmatrix} \dfrac{x_1}{x_1-1} & \dfrac{x_2}{x_2-1} & \dots & \dfrac{x_n}{x_n-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$

339. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \dots & n^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \dots & n^{2n-1} \end{vmatrix}$.

340. $\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \dots & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \dots & b_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \dots & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$.

341. $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}^{n-1}\alpha_1 & \operatorname{sen}^{n-2}\alpha_1\cos\alpha_1 & \dots & \cos^{n-1}\alpha_1 \\ \operatorname{sen}^{n-1}\alpha_2 & \operatorname{sen}^{n-2}\alpha_2\cos\alpha_2 & \dots & \cos^{n-1}\alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{sen}^{n-1}\alpha_n & \operatorname{sen}^{n-2}\alpha_n\cos\alpha_n & \dots & \cos^{n-1}\alpha_n \end{vmatrix}$.

342. $\begin{vmatrix} f_n(x_1, y_1) & y_1 f_{n-1}(x_1, y_1) & \dots & y_1^{n-1}f_1(x_1, y_1) & y_{1n}^n \\ f_n(x_2, y_2) & y_2 f_{n-1}(x_2, y_2) & \dots & y_2^{n-1}f_1(x_2, y_2) & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(x_{n+1}, y_{n+1}) & y_{n+1}f_{n-1}(x_{n+1}, y_{n+1}) & \dots & y_{n+1}^{n-1}f_1(x_{n+1}, y_{n+1}) & y_{n+1}^n \end{vmatrix}$,

donde $f_i(x, y)$ es un polinomio x, y homogéneo de grado i.

343*. $\begin{vmatrix} a_1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ a_2 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

344*. $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}$.

345. $\begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$.

346. $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{s-1} & x_1^{s+1} & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{s-1} & x_2^{s+1} & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{s-1} & x_n^{s+1} & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$.

347*. $\begin{vmatrix} 1 & x_1(x_1-1) & x_1^2(x_1-1) & \dots & x_1^{n-1}(x_1-1) \\ 1 & x_2(x_2-1) & x_2^2(x_2-1) & \dots & x_2^{n-1}(x_2-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n(x_n-1) & x_n^2(x_n-1) & \dots & x_n^{n-1}(x_n-1) \end{vmatrix}$.

348*. $\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \dots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \dots & 1+x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \dots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$.

349*. $$\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_1 & \cos 2\varphi_1 & \dots & \cos(n-1)\varphi_1 \\ 1 & \cos\varphi_2 & \cos 2\varphi_2 & \dots & \cos(n-1)\varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos\varphi_n & \cos 2\varphi_n & \dots & \cos(n-1)\varphi_n \end{vmatrix}.$$

350*. $$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\varphi_1 & \operatorname{sen} 2\varphi_1 & \dots & \operatorname{sen} n\varphi_1 \\ \operatorname{sen}\varphi_2 & \operatorname{sen} 2\varphi_2 & \dots & \operatorname{sen} n\varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{sen}\varphi_n & \operatorname{sen} 2\varphi_n & \dots & \operatorname{sen} n\varphi_n \end{vmatrix}.$$

351*. $$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

352. $$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ b & a & d & c & f & e & h & g \\ c & d & a & b & g & h & e & f \\ d & c & b & a & h & g & f & e \\ e & f & g & h & a & b & c & d \\ f & e & h & g & b & a & d & c \\ g & h & e & f & c & d & a & b \\ h & g & f & e & d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

353*. $$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix}.$$

354. $$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \dots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \dots & a_2-b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \dots & a_n-b_n \end{vmatrix}.$$

355. $$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 2+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

356. $$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \dots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \dots & f_2(a_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \dots & f_n(a_n) \end{vmatrix},$$

donde $f_i(x)$ es un polinomio de un grado que no supera $n-2$.

357. $$\begin{vmatrix} 1+a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & 1+a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & 1+a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

358*. $$\begin{vmatrix} x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & x_ny_n \end{vmatrix}.$$

359*. $$\begin{vmatrix} a_1-b_1+x & a_1-b_2 & \dots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2+x & \dots & a_2-b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \dots & a_n-b_n+x \end{vmatrix}.$$

360. $$\begin{vmatrix} x_1+a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2+a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & x_n+a_nb_n \end{vmatrix}.$$

361*. $$\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & \dots & b & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & b & \dots & a & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$$

(el orden del determinante es $2n$).

362. $$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \dots & b_2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & b_{2n-1} & \dots & a_{2n-1} & 0 \\ b_{2n} & 0 & \dots & 0 & a_{2n} \end{vmatrix}.$$

363. $$\begin{vmatrix} \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{2}{x} \end{vmatrix}.$$

364*. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

365*. La serie numérica que comienza por los números 1, 2, y en la cual cada uno de los números siguientes es igual a la suma de los dos anteriores, o sea, la serie 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . ., se denomina serie de Fibonacci.

Demostrar que el n-ésimo término de la serie mencionada es igual al determinante de orden n:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Calcular los determinantes:

366. $\begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 9 \end{vmatrix}$.

367. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

368. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

369*. $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}$.

370. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a \end{vmatrix}$.

371*. Demostrar la igualdad:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \cos n\alpha.$$

Obtener la expresión $\cos n\alpha$ a través de $\cos\alpha$, utilizando dicha igualdad y el resultado del problema 369.

372. Demostrar la igualdad

$$\frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix},$$

donde el determinante tiene el orden $n-1$. Empleando esa igualdad y el resultado del problema 369, representar $\operatorname{sen} n\alpha$ en forma del producto de $\operatorname{sen}\alpha$ por el polinomio de $\cos\alpha$.

373*. Demostrar la igualdad sin calcular los propios determinantes:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & b_2c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & b_3c_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{vmatrix}.$$

Calcular los determinantes:

374. $\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$.

375. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$.

376*. $\begin{vmatrix} a & a+x & a+2x & \dots & a+(n-2)x & a+(n-1)x \\ a+(n-1)x & a & a+x & \dots & a+(n-3)x & a+(n-2)x \\ a+(n-2)x & a+(n-1)x & a & \dots & a+(n-4)x & a+(n-3)x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+x & a+2x & a+3x & \dots & a+(n-1)x & a \end{vmatrix}$.

377. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-2} & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & x & \dots & x^{n-3} & x^{n-2} \\ x^{n-2} & x^{n-1} & 1 & \dots & x^{n-4} & x^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x^2 & x^3 & \dots & x^{n-1} & 1 \end{vmatrix}$.

378. Sin calcular los determinantes establecer de qué modo se relacionan entre sí los dos circulantes:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n & a_1 \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_1 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix},$$

construidos de unos mismos números $a_1, a_2, \dots, a_n$, utilizando las permutaciones circulares en dos direcciones opuestas.

Calcular los determinantes:

379*. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \dots & \binom{n}{1} \\ 1 & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \dots & \binom{n+1}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{n}{n-1} & \binom{n+1}{n-1} & \dots & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix}$,

donde $\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

380*. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \binom{m}{1} & \binom{m+1}{1} & \binom{m+2}{1} & \dots & \binom{m+n}{1} \\ \binom{m+1}{2} & \binom{m+2}{2} & \binom{m+3}{2} & \dots & \binom{m+n+1}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{m+n-1}{n} & \binom{m+n}{n} & \binom{m+n+1}{n} & \dots & \binom{m+2n-1}{n} \end{vmatrix}.$$

381*. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \dots & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix}.$$

382*. $$\begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{n} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{2} & \dots & \binom{n+1}{n} \\ 1 & \binom{n+2}{1} & \binom{n+2}{2} & \dots & \binom{n+2}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{2n}{1} & \binom{2n}{2} & \dots & \binom{2n}{n} \end{vmatrix}.$$

383*. $$\begin{vmatrix} \binom{p+n}{n} & \binom{p+n+1}{n} & \dots & \binom{p+2n}{n} \\ \binom{p+n+1}{n} & \binom{p+n+2}{n} & \dots & \binom{p+2n+1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{p+2n}{n} & \binom{p+2n+1}{n} & \dots & \binom{p+3n}{n} \end{vmatrix}.$$

384*. $$\begin{vmatrix} 1 & \binom{p}{1} & \binom{p}{2} & \dots & \binom{p}{n} \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \binom{p+1}{2} & \dots & \binom{p+1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{p+n}{1} & \binom{p+n}{2} & \dots & \binom{p+n}{n} \end{vmatrix}.$$

385*. $$\begin{vmatrix} \binom{m}{p} & \binom{m}{p+1} & \dots & \binom{m}{p+n} \\ \binom{m+1}{p} & \binom{m+1}{p+1} & \dots & \binom{m+1}{p+n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{m+n}{p} & \binom{m+n}{p+1} & \dots & \binom{m+n}{p+n} \end{vmatrix}.$$

386*.
$$\begin{vmatrix} 1 & \binom{2}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} & \dots & \binom{n}{n} \\ 1 & \binom{n+1}{2} & \binom{n+1}{3} & \binom{n+1}{4} & \dots & \binom{n+1}{n} \end{vmatrix}.$$

387*.
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 3 & 6 & 10 & \dots & \frac{n(n+1)}{2!} \\ 4 & 10 & 20 & \dots & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & \frac{n(n+1)}{2!} & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} & \dots & \frac{n(n+1)\dots(2n-2)}{(n-1)!} \end{vmatrix}.$$

388*.
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \binom{1}{1} & 0 & 0 & \dots & 0 & x \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & \dots & 0 & x^2 \\ 1 & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \dots & 0 & x^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \dots & \binom{n}{n-1} & x^n \end{vmatrix}.$$

389.*
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1! & 0 & 0 & 0 & \dots & x \\ 1 & 2 & 2! & 0 & 0 & \dots & x^2 \\ 1 & 3 & 3\cdot 2 & 3! & 0 & \dots & x^3 \\ 1 & 4 & 4\cdot 3 & 4\cdot 3\cdot 2 & 4! & \dots & x^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & n(n-1) & n(n-1)(n-2) & n(n-1)(n-2)(n-3) & \dots & x^n \end{vmatrix}.$$

390*.
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_0 \\ 1 & \binom{1}{1} & 0 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & \dots & 0 & x_2 \\ 1 & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \dots & 0 & x_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \dots & \binom{n}{n-1} & x_n \end{vmatrix}.$$

391*. $$\begin{vmatrix} 0 & x & x & \dots & x \\ y & 0 & x & \dots & x \\ y & y & 0 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

392. $$\begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x \\ y & a & x & \dots & x \\ y & y & a & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & \dots & a \end{vmatrix}.$$

393. $$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ y & a_2 & x & \dots & x \\ y & y & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

394. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & x & x & \dots & x \\ 1 & y & a_2 & x & \dots & x \\ 1 & y & y & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & y & y & y & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

395. $$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

396. $$\begin{vmatrix} a+1 & a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+1 \end{vmatrix}.$$

397. $$\begin{vmatrix} n!a_0 & (n-1)!\,a_1 & (n-2)!a_2 & \dots & a_n \\ -n & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -(n-1) & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}.$$

398. $$\begin{vmatrix} \operatorname{cosec}\alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\operatorname{cosec}\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\operatorname{cosec}\alpha & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2\operatorname{cosec}\alpha \end{vmatrix}.$$

399*. $$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & x & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & x & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-3 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}.$$

400. $$\begin{vmatrix} a^p-x & a^{p+1}-x & \ldots & a^{p+n-1}-x \\ a^{p+n}-x & a^{p+n+1}-x & \ldots & a^{p+2n-1}-x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^{p+n(n-1)}-x & a^{p+n(n-1)+1}-x & \ldots & a^{p+n^2-1}-x \end{vmatrix}.$$

401. $$\begin{vmatrix} 1-x & a & a^2 & \ldots & a^{n-1} \\ a & a^2-x & a^3 & \ldots & a^n \\ a^2 & a^3 & a^4-x & \ldots & a^{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^{n-1} & a^n & a^{n+1} & \ldots & a^{2n-2}-x \end{vmatrix}.$$

402. $$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}.$$

403. $$\begin{vmatrix} c_0 & b & b & b & \ldots & b \\ a & c_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a & 0 & c_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a & 0 & 0 & 0 & \ldots & c_n \end{vmatrix}.$$

404*. $$\begin{vmatrix} 1 & -b & -b & -b & \ldots & -b \\ 1 & na & -2b & -3b & \ldots & -(n-1)\,b \\ 1 & (n-1)\,a & a & -3b & \ldots & -(n-1)\,b \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2a & a & a & \ldots & a \end{vmatrix}.$$

405*. $$\begin{vmatrix} (x_1-a_1)^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ a_1^2 & (x_2-a_2)^2 & \ldots & a_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & (x_n-a_n)^2 \end{vmatrix}.$$

406. $$\begin{vmatrix} (x_1-a_1)^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \ldots & a_1a_n \\ a_2a_1 & (x_2-a_2)^2 & a_2a_3 & \ldots & a_2a_n \\ a_3a_1 & a_3a_2 & (x_3-a_3)^2 & \ldots & a_3a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \ldots & (x_n-a_n)^2 \end{vmatrix}.$$

407*. $$\begin{vmatrix} 1-b_1 & b_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 1-b_2 & b_3 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_3 & b_4 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1-b_n \end{vmatrix}.$$

408. $$\begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ b_1 & 0 & a_3 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & 0 & \ldots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

409*. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix}$.

410*. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ x & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ x & x & 1 & \dots & n-2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix}$.

411*. $\begin{vmatrix} a_0x^n & a_1x^{n-1} & a_2x^{n-2} & \dots & a_{n-1}x & a_n \\ a_0x & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_0x^2 & a_1x & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0x^{n-1} & a_1x^{n-2} & a_2x^{n-3} & \dots & b_{n-1} & 0 \\ a_0x^n & a_1x^{n-1} & a_2x^{n-2} & \dots & a_{n-1}x & b_n \end{vmatrix}$.

412. $\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+2 & x & \dots & x \\ x & x & x+3 & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & x & \dots & x+n \end{vmatrix}$.

413. $\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+2 & x & \dots & x \\ x & x & x+4 & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & x & \dots & x+2^n \end{vmatrix}$.

414. $\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+\frac{1}{2} & x & \dots & x \\ x & x & x+\frac{1}{3} & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & x & \dots & x+\frac{1}{n} \end{vmatrix}$.

415. $\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+a & x & \dots & x \\ x & x & x+a^2 & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & x & \dots & x+a^n \end{vmatrix}$.

416*. $\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^{-1} & (a_1+b_2)^{-1} & \dots & (a_1+b_n)^{-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (a_n+b_1)^{-1} & (a_n+b_2)^{-1} & \dots & (a_n+b_n)^{-1} \end{vmatrix}$.

417*. $$\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1-a_1} & \frac{1}{x_1-a_2} & \dots & \frac{1}{x_1-a_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{x_n-a_1} & \frac{1}{x_n-a_2} & \dots & \frac{1}{x_n-a_n} \end{vmatrix}.$$

418*. $$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \dots & \frac{1}{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix}.$$

419*. $$\begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & a_1+a_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_2+a_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix}.$$

420*. Obtener la ley de composición de una expresión extendida para el continuante de orden n [1]):

$$(a_1a_2 \dots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & -1 & a_n \end{vmatrix},$$

o sea, las expresiones en forma de un polinomio de $a_1, a_2, \dots, a_n$. Escribir los continuantes del orden 4, 5 y 6 en forma extendida.

§ 6. Menores, cofactores y teorema de Laplace

421. ¿Cuántos menores de orden k contiene el determinante de orden n?

422. Demostrar que para determinar el signo del cofactor puede utilizarse la suma de los números de las filas y columnas no del menor dado, sino del complementario a éste. En otras palabras, si M es el menor dado, M', el menor complementario, A, el cofactor del menor M, A', el cofactor del menor M', entonces de $A = \varepsilon M'$, donde $\varepsilon = \pm 1$, se desprende que $A' = \varepsilon M$.

423. Mostrar que el desarrollo de Laplace del determinante de orden n por cualesquiera k filas (columnas) coincide con su descomposición por las demás $n-k$ filas (columnas).

[1]) La denominación «continuante» se debe a la relación con las fracciones continuas, que vendrá establecida en el problema 539.

424*. Mostrar que la regla de los signos que enlaza el cofactor A con el menor complementario M' del menor M, puede enunciarse de la siguiente manera: sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ los números de las filas, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ los números de las columnas del menor M en el determinante D de orden n, escritos en orden creciente, y

$$\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n \quad \text{y} \quad \beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \ldots, \beta_n$$

los números de las filas y columnas respectivamente del menor complementario M', escritos también en orden creciente; entonces $A = M'$, si la sustitución $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \end{pmatrix}$ es par, y $A = -M'$, si esa sustitución es impar.

Calcular los determinantes, aplicando el teorema de Laplace:

425. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. **426.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$. **427.** $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

428. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. **429.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$. **430.** $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

431. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$. **432.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

433. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 8 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. **434.** $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 9 & 7 & 8 & 9 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

435. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

436. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 27 & 0 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$

437. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ y_1 & y_2 & \cos\beta & \operatorname{sen}\beta \\ z_1 & z_2 & \cos\gamma & \operatorname{sen}\gamma \end{vmatrix}.$

438. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a' & b' & c' \\ a & a' & x_1 & y_3 & y_2 \\ b & b' & y_3 & x_2 & y_1 \\ c & c' & y_2 & y_1 & x_3 \end{vmatrix}.$

439. $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z \end{vmatrix}.$

440. $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a' & 1 & 0 & 0 \\ b' & 0 & 1 & 0 \\ c' & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$

441. $\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}.$

442. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}.$

443.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,\,2n-2} & a_{1,\,2n-1} & a_{1,\,2n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,\,2n-2} & a_{2,\,2n-1} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3,\,2n-2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{2n-2,\,3} & \dots & a_{2n-2,\,2n-2} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2n-1,\,2} & a_{2n-1,\,3} & \dots & a_{2n-1,\,2n-2} & a_{2n-1,\,2n-1} & 0 \\ a_{2n,\,1} & a_{2n,\,2} & a_{2n,\,3} & \dots & a_{2n,\,2n-2} & a_{2n,\,2n-1} & a_{2n,\,2n} \end{vmatrix}.$$

444. $\begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{12} & 1 & \dots & a_{1n} & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ a_{21} & x_1 & a_{22} & x_2 & \dots & a_{2n} & x_n \\ x_1 & 0 & x_2 & 0 & \dots & x_n & 0 \\ a_{31} & x_1^2 & a_{32} & x_2^2 & \dots & a_{3n} & x_n^2 \\ x_1^2 & 0 & x_2^2 & 0 & \dots & x_n^2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & x_1^{n-1} & a_{n2} & x_2^{n-1} & \dots & a_{nn} & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-1} & 0 & x_2^{n-1} & 0 & \dots & x_n^{n-1} & 0 \end{vmatrix}.$

Utilizando el teorema de Laplace, calcular los siguientes determinantes, transformándolos antes:

445*. $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 7 & 8 & -7 \\ -6 & 4 & -9 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & 5 & 4 & -3 \end{vmatrix}.$$

446. $$\begin{vmatrix} 5 & -5 & -3 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -9 & -5 \\ -7 & 7 & 6 & 8 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}.$$

447. $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -5 & -3 & -2 \\ 5 & -6 & 4 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

448. $$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & -3 \\ -2 & 3 & -4 & 2 & -3 \\ 6 & 4 & 7 & -8 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

449. $$\begin{vmatrix} 5 & 9 & -2 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -3 & 3 \\ -5 & -7 & 2 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & 8 & -6 & 8 \\ 6 & -5 & 3 & -3 & 7 \end{vmatrix}.$$

450. $$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

451. $$\begin{vmatrix} 1+x & x & \dots & x & x & \dots & x & 1+x \\ x & 1+x & \dots & x & x & \dots & 1+x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & 1+x & 1+x & \dots & x & x \\ x & x & \dots & 1+2x & 1+x & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & 1+2x & \dots & x & x & \dots & 1+x & x \\ 1+2x & x & \dots & x & x & \dots & x & 1+x \end{vmatrix}$$

(el orden del determinante es igual a $2n$).

452. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{n,n-1} & b_{nn} \\ c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1,n-1} & c_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2,n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ c_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

453. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & x & a_1 & a_2-1 & \dots & a_{n-1}-1 & a_n-1 \\ 1 & 1 & \dots & x & 1 & a_1-1 & a_2 & \dots & a_{n-1}-1 & a_n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & 1 & \dots & 1 & 1 & a_1-1 & a_2-1 & \dots & a_{n-1}-1 & a_n \\ a_1-x & a_1 & \dots & a_1 & a_1 & -a_1 & -a_1 & \dots & -a_1 & x-a_1 \\ a_2 & a_2-x & \dots & a_2 & a_2 & -a_2 & -a_2 & \dots & x-a_2 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_n & \dots & a_n & a_n-x & x-a_n & -a_n & \dots & -a_n & -a_n \end{vmatrix}.$$

454. En el determinante D de orden par $n = 2k$ separemos cuatro menores M_1, M_2, M_3 y M_4 de orden k, como se muestra en el esquema

$$\begin{array}{c} \qquad M_1 \qquad\qquad\qquad\qquad M_2 \\ \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{k,n} \\ \hline a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{array}\right| \\ \qquad M_3 \qquad\qquad\qquad\qquad M_4 \end{array}$$

Expresar el determinante D mediante los menores M_1, M_2, M_3 y M_4 para los dos siguientes casos:

a) si todos los elementos de M_2 ó M_3 son nulos;

b) si todos los elementos de M_1 ó M_4 son nulos.

455. Supongamos que en el determinante D de orden $n = kl$ se separan l menores de orden k, situados a lo largo de la segunda diagonal, es decir, M_1 yace en las primeras k filas y últimas k columnas, M_2 en las siguientes k filas y anteriores k columnas, etc., y por fin, M_l se encuentra en las últimas k filas y primeras k columnas.

Expresar D por medio de $M_1, M_2, \dots, M_l$ si todos los elementos de D, yacentes por un lado de la citada cadena de menores, son nulos.

456. Sea que en el determinante D de orden n se separan k filas y l columnas, con la particularidad de que $l \leqslant k$ y todos los elementos de las l columnas elegidas, no yacentes en las k filas separadas, son nulos. Demostrar que en el desarrollo de Laplace del determinante D por las k filas separadas es necesario tomar sólo aquellos

menores de orden k que poseen las l columnas elegidas; la afirmación que se obtiene cambiando de lugar las filas y columnas, también es justa.

457. Resolver el problema 206 usando el teorema de Laplace.

458. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 & \dots & a_{1n} & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 & b_{12} & \dots & 0 & b_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 & \dots & a_{2n} & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 & b_{22} & \dots & 0 & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & a_{n2} & 0 & \dots & a_{nn} & 0 \\ 0 & b_{n1} & 0 & b_{n2} & \dots & 0 & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

459*. Calcular el determinante de orden $k+l$:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & & 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} k \text{ filas} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} l \text{ filas} \end{matrix}$$

460. Escribir la descomposición del continuante (compárese con el problema 420) de orden n:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix}$$

por las primeras k filas. ¿Qué propiedad de los números de Fibonacci (problema 365) se obtiene de aquí para $n = 2k$?

461. Sin suprimir los paréntesis demostrar que la igualdad

$$(ab' - a'b)(cd' - c'd) - (ac' - a'c)(bd' - b'd) + \\ + (ad' - a'd)(bc' - b'c) = 0$$

es válida para cualesquiera valores de $a, b, c, d, a', b', c', d'$.

462*. En la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} & \dots & a_{1,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} & \dots & a_{n,2n} \end{array}\right)$$

que contiene n filas y $2n$ columnas, cogemos cualquier menor M de orden n que posee, por lo menos, la mitad de las columnas que se encuentran a la izquierda del centro de la matriz.

Sea σ la suma de los números de las columnas del menor M y sea M' el menor de orden n compuesto de las demás columnas de la matriz. Demostrar que $\sum (-1)^{\sigma} MM' = 0$, donde la suma se toma por todos los menores M del citado tipo.

463*. Mostrar que los tres determinantes

$$D=\begin{vmatrix} a_1x_1 & b_1x_1 & a_1x_2 & b_1x_2 & a_1x_3 & b_1x_3 \\ a_2x_1 & b_2x_1 & a_2x_2 & b_2x_2 & a_2x_3 & b_2x_3 \\ a_1y_1 & b_1y_1 & a_1y_2 & b_1y_2 & a_1y_3 & b_1y_3 \\ a_2y_1 & b_2y_1 & a_2y_2 & b_2y_2 & a_2y_3 & b_2y_3 \\ a_1z_1 & b_1z_1 & a_1z_2 & b_1z_2 & a_1z_3 & b_1z_3 \\ a_2z_1 & b_2z_1 & a_2z_2 & b_2z_2 & a_2z_3 & b_2z_3 \end{vmatrix},$$

$$\delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \Delta=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

están relacionados mediante la igualdad $D = \delta^2\Delta^2$ [1].

464*. Sean

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4,$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4,$$
$$h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4$$

y

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = x^3 + px^2 + qx + r.$$

Mostrar que

$$\begin{vmatrix} f(\alpha) & f(\beta) & f(\gamma) \\ g(\alpha) & g(\beta) & g(\gamma) \\ h(\alpha) & h(\beta) & h(\gamma) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ r & q & p & 1 & 0 \\ 0 & r & q & p & 1 \end{vmatrix}.$$

465. Se dice que el determinante

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & x_{11} & \ldots & x_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & x_{n1} & \ldots & x_{nk} \\ y_{11} & \ldots & y_{1n} & 0 & \ldots & 0 \\ y_{k1} & \ldots & y_{kn} & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

se obtiene, rebordeándolo por medio de k filas y k columnas del determinante $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

[1]) La generalización de esta propiedad se da en el problema 540.

Demostrar que para $k > n$, $D = 0$, mientras que para $k \leqslant n$, D es una forma (o sea, un polinomio homogéneo) de grado $n - k$ con respecto a los elementos a_{ij} del determinante Δ y una forma de grado $2k$ con respecto a los elementos rebordeantes x_{ij}, y_{ij}, para los cuales sirven de coeficientes los cofactores de los menores del k-ésimo orden en el determinante Δ. A saber: demostrar que

$$D = (-1)^k \sum A_{i_1 i_2 \ldots i_k j_1 j_2 \ldots j_k} X_{i_1 i_2 \ldots i_k} Y_{j_1 j_2 \ldots j_k},$$

donde $A_{i_1 i_2 \ldots i_k j_1 j_2 \ldots j_k}$ es el cofactor del menor del determinante Δ que se encuentra en las filas con los números $i_1, i_2, \ldots, i_k$ y en las columnas con los números $j_1, j_2, \ldots, j_k$, y $X_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ e $Y_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ son los menores del determinante D compuestos de los elementos rebordeantes y los menores que yacen en las filas (columnas, respectivamente) con los números indicados. La suma se toma por todas las combinaciones de los índices que varían desde la unidad hasta n, a condición de que $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$.

466*. Demostrar la siguiente generalización del teorema de Laplace: si las filas del determinante D de orden n se dividen en p sistemas sin filas comunes, con la particularidad de que en el primer sistema entran las filas con números $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k$, y en el segundo, las filas con números $\alpha_{k+1} < \alpha_{k+2} < \ldots < \alpha_{k+l}$, etc., y por fin, el último sistema lo constituyen las filas con números $\alpha_{n-s+1} < \alpha_{n-s+2} < \ldots < \alpha_n$, luego si en la matriz del primer sistema de filas se toma el menor M_1 del orden k, yacente en las columnas con números $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_k$, en la segunda matriz el menor M_2 del orden l, yacente en las columnas con números $\beta_{k+1} < \beta_{k+2} < \ldots < \beta_{k+l}$, diferentes de los números de las columnas de M_1, etc., y finalmente, en la última matriz, el menor M_p del orden s que se halla en las restantes columnas con números $\beta_{n-s+1} < \beta_{n-s+2} < \ldots < \beta_n$, y si después formamos el producto $\varepsilon M_1 M_2 \ldots M_p$, donde $\varepsilon = +1$, si la sustitución

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

es par y $\varepsilon = -1$, si esta sustitución es impar, entonces el determinante D es igual a la suma de todos los posibles productos de semejante tipo. El hecho de que esta afirmación generaliza el teorema de Laplace, se desprende del problema 424.

§ 7. Multiplicación de los determinantes

467. Multiplicar los determinantes

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix}$$

mediante todos los cuatro procedimientos posibles (o sea, multiplicando las filas o las columnas del primer determinante por las filas o columnas del segundo) y comprobar que en todos los casos el valor del determinante obtenido es igual al producto de los valores de los determinantes dados.

468. Calcular el determinante, elevándolo al cuadrado

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}.$$

469. Calcular el determinante, elevándolo al cuadrado

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ -b & a & d & -c & f & -e & -h & g \\ -c & -d & a & b & g & h & -e & -f \\ -d & c & -b & a & h & -g & f & -e \\ e & -f & -g & -h & a & b & c & d \\ -f & e & -h & g & -b & a & -d & c \\ -g & h & e & -f & -c & d & a & -b \\ -h & -g & f & e & -d & -c & b & a \end{vmatrix}.$$

Calcular los siguientes determinantes, representándolos en forma de productos de determinantes:

470*. $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$

471. $\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{vmatrix}.$

472. $\begin{vmatrix} 1 & \cos(\alpha_1-\alpha_2) & \cos(\alpha_1-\alpha_3) & \dots & \cos(\alpha_1-\alpha_n) \\ \cos(\alpha_1-\alpha_2) & 1 & \cos(\alpha_2-\alpha_3) & \dots & \cos(\alpha_2-\alpha_n) \\ \cos(\alpha_1-\alpha_3) & \cos(\alpha_2-\alpha_3) & 1 & \dots & \cos(\alpha_3-\alpha_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(\alpha_1-\alpha_n) & \cos(\alpha_2-\alpha_n) & \cos(\alpha_3-\alpha_n) & \dots & 1 \end{vmatrix}.$

473. $\begin{vmatrix} \operatorname{sen} 2\alpha_1 & \operatorname{sen}(\alpha_1+\alpha_2) & \dots & \operatorname{sen}(\alpha_1+\alpha_n) \\ \operatorname{sen}(\alpha_2+\alpha_1) & \operatorname{sen} 2\alpha_2 & \dots & \operatorname{sen}(\alpha_2+\alpha_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{sen}(\alpha_n+\alpha_1) & \operatorname{sen}(\alpha_n+\alpha_2) & \dots & \operatorname{sen} 2\alpha_n \end{vmatrix}.$

474. $\begin{vmatrix} \frac{1-a_1^nb_1^n}{1-a_1b_1} & \frac{1-a_1^nb_2^n}{1-a_1b_2} & \dots & \frac{1-a_1^nb_n^n}{1-a_1b_n} \\ \frac{1-a_2^nb_1^n}{1-a_2b_1} & \frac{1-a_2^nb_2^n}{1-a_2b_2} & \dots & \frac{1-a_2^nb_n^n}{1-a_2b_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1-a_n^nb_1^n}{1-a_nb_1} & \frac{1-a_n^nb_2^n}{1-a_nb_2} & \dots & \frac{1-a_n^nb_n^n}{1-a_nb_n} \end{vmatrix}.$

475. $\begin{vmatrix} (a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \dots & (a_0+b_n)^n \\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \dots & (a_1+b_n)^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \dots & (a_n+b_n)^n \end{vmatrix}.$

476*. $\begin{vmatrix} 1^{n-1} & 2^{n-1} & \dots & n^{n-1} \\ 2^{n-1} & 3^{n-1} & \dots & (n+1)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^{n-1} & (n+1)^{n-1} & \dots & (2n-1)^{n-1} \end{vmatrix}.$

477. $\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$, donde $s_k = x_1^k + x_2^k + \dots x_n^k$

478*. $\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n & x \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} & x^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \dots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}$, donde $s_k = x_1^k + x_1^k + \dots + x_n^k$.

479*. Demostrar que el valor del circulante se define mediante la igualdad

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix} = f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2) \dots f(\varepsilon_n),$$

donde $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_nx^{n-1}$ y $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ son todos los valores de la raíz de n-ésimo grado de la unidad.

480. Demostrar que teniendo las designaciones del problema anterior

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2) \dots f(\varepsilon_n).$$

481*. Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{n-1} \\ \alpha^{n-1} & 1 & \alpha & \dots & \alpha^{n-2} \\ \alpha^{n-2} & \alpha^{n-1} & 1 & \dots & \alpha^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

482. Calcular el determinante, aplicando el resultado del problema 479

$$\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & a \end{vmatrix}.$$

483. Utilizando el resultado del problema 479, calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ d & c & d & a \end{vmatrix}.$$

Calcular los determinantes:

484. $$\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & C_n^1 & \dots & C_n^{n-2} & C_n^{n-1} \\ C_n^{n-1} & 1 & 1 & \dots & C_n^{n-3} & C_n^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

485. $$\begin{vmatrix} 1 & 2a & 3a^2 & \dots & na^{n-1} \\ na^{n-1} & 1 & 2a & \dots & (n-1)\,a^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2a & 3a^2 & 4a^3 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

486*. Demostrar la igualdad

$$\begin{vmatrix} s-a_1 & s-a_2 & \dots & s-a_n \\ s-a_n & s-a_1 & \dots & s-a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s-a_2 & s-a_3 & \dots & s-a_1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{vmatrix},$$

donde $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Calcular los determinantes:

487*. $$\begin{vmatrix} \overbrace{-1 & -1 & -1 & \dots & -1}^{(p\text{ columnas})} & \overbrace{1 & 1 & \dots & 1 & 1}^{(n-p\text{ columnas})} \\ 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

488*.
$$\begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{a \quad a \quad a \quad \dots \quad a}}^{(p\text{ columnas})}\ \overbrace{\hphantom{b \quad b \quad \dots \quad b \quad b}}^{(n-p\text{ columnas})} \\ \begin{vmatrix} a & a & a & \dots & a & b & b & \dots & b & b \\ b & a & a & \dots & a & a & b & \dots & b & b \\ b & b & a & \dots & a & a & a & \dots & b & b \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a & a & a & \dots & b & b & b & \dots & b & a \end{vmatrix} \end{array}.$$

489*.
$$\begin{vmatrix} \cos\frac{\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{3\pi}{n} & \dots & -1 \\ -1 & \cos\frac{\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} & \dots & \cos\frac{(n-1)\pi}{n} \\ \cos\frac{(n-1)\pi}{n} & -1 & \cos\frac{\pi}{n} & \dots & \cos\frac{(n-2)\pi}{n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cos\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{3\pi}{n} & \cos\frac{4\pi}{n} & \dots & \cos\frac{\pi}{n} \end{vmatrix}.$$

490*.
$$\begin{vmatrix} \cos\theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta & \dots & \cos n\theta \\ \cos n\theta & \cos\theta & \cos 2\theta & \dots & \cos(n-1)\theta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta & \dots & \cos 0 \end{vmatrix}.$$

491.
$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} a & \operatorname{sen}(a+h) & \operatorname{sen}(a+2h) & \dots & \operatorname{sen}[a+(n-1)h] \\ \operatorname{sen}[a+(n-1)h] & \operatorname{sen} a & \operatorname{sen}(a+h) & \dots & \operatorname{sen}[a+(n-2)h] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \operatorname{sen}(a+h) & \operatorname{sen}(a+2h) & \operatorname{sen}(a+3h) & \dots & \operatorname{sen} a \end{vmatrix}.$$

492*.
$$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ n^2 & 1^2 & 2^2 & \dots & (n-1)^2 \\ (n-1)^2 & n^2 & 1^2 & \dots & (n-2)^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \dots & 1^2 \end{vmatrix}.$$

493*. Calcular el circulante antisimétrico (o el determinante anticíclico):

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & -a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_2 & -a_3 & -a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

494.
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n z & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} z & a_n z & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 z & a_3 z & a_4 z & \dots & a_1 \end{vmatrix},$$

donde z es cualquier número.

495*. Demostrar que el circulante de orden $2n$ con la primera fila compuesta de elementos $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}$ es igual al producto del circulante de orden n, cuya primera fila está formada de elementos $a_1 + a_{n+1}, a_2 + a_{n+2}, \ldots, a_n + a_{2n}$ y el circulante antisimétrico de orden n con la primera fila compuesta de elementos $a_1 - a_{n+1}, a_2 - a_{n+2}, \ldots, a_n - a_{2n}$.

496*. Demostrar la identidad de Euler

$$\begin{aligned}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = \\ = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4)^2 + \\ + (x_1y_2 - x_2y_1 - x_3y_4 + x_4y_3)^2 + \\ + (x_1y_3 + x_2y_4 - x_3y_1 - x_4y_2)^2 + \\ + (x_1y_4 - x_2y_4 + x_3y_2 - x_4y_1)^2\end{aligned}$$

multiplicando los dos determinantes

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & -x_1 & -x_4 & x_3 \\ x_3 & x_4 & -x_1 & -x_2 \\ x_4 & -x_3 & x_2 & -x_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_2 & -y_1 & -y_4 & y_3 \\ y_3 & y_4 & -y_1 & -y_2 \\ y_4 & -y_3 & y_2 & -y_1 \end{vmatrix}.$$

¿Qué propiedad de los números enteros se desprende de eso?

497*. Por medio de la multiplicación de los determinantes, demostrar la identidad

$$(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)(a'^3 + b'^3 + c'^3 - 3a'b'c') = \\ = A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC,$$

donde $A = aa' + bc' + cb'$, $B = ac' + bb' + ca'$, $C = ab' + ba' + cc'$. ¿Qué propiedad de los números enteros se deduce de aquí?

498*. Empleando las designaciones del problema anterior, demostrar la identidad

$$(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)(a'^2 + b'^2 + c'^2 - a'b' - a'c' - b'c') = \\ = A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC - BC.$$

499*. Demostrar la siguiente generalización del teorema sobre la multiplicación de los determinantes. Supongamos que se dan dos matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

cada una compuesta de m filas y n columnas.

Combinando las filas de una matriz con las filas de la otra y suponiendo que $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{jk}$, formemos el determinante de orden m

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{vmatrix}.$$

Después designemos por $A_{i_1, i_2, \dots, i_m}$, y $B_{i_1, i_2, \dots, i_m}$ los menores de orden m de las matrices A y B respectivamente, formados de las columnas de dichas matrices con los números $i_1, i_2, \dots, i_m$ en el mismo orden. Entonces

$$D = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_m \leqslant n} A_{i_1, i_2, \dots, i_m} B_{i_1, i_2, \dots, i_m} \tag{1}$$

para $m \leqslant n$ (fórmula de Binet—Cauchy), es decir, el determinante D es igual a la suma de los productos de todos los menores de orden m de la matriz A por los correspondientes menores de la matriz B. Para $m > n$

$$D = 0. \tag{2}$$

500*. Demostrar la afirmación (2) del problema que precede, aplicando el teorema de la multiplicación de los determinantes.

501*. Sin realizar la multiplicación, demostrar la identidad de Cauchy

$$(a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_nc_n)(b_1d_1 + b_2d_2 + \dots + b_nd_n) -$$
$$-(a_1d_1 + a_2d_2 + \dots + a_nd_n)(b_1c_1 + b_2c_2 + \dots + b_nc_n) =$$
$$= \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant n} (a_ib_k - a_kb_i)(c_id_k - c_kd_i) \quad (n > 1).$$

502. Sin multiplicar, demostrar la identidad de Lagrange

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 = \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant n} (a_ib_k - a_kb_i)^2.$$

503*. Demostrar que para cualesquiera números reales

$$a_1, a_2, \dots, a_n \quad \text{y} \quad b_1, b_2, \dots, b_n$$

es válida la desigualdad

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geqslant$$
$$\geqslant (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2,$$

con la particularidad de que el signo de igualdad se pone si, y sólo si, uno de los citados sistemas difiere del otro solamente por un factor numérico (puede ser igual a cero). (Desigualdad de Cauchy—Buniakovski.)

504*. Mostrar que para cualesquiera números complejos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ se cumple la igualdad

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\overline{a}_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\overline{b}_k\right)-\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\overline{b}_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{a}_k b_k\right)=$$

$$=\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}(a_jb_k-a_kb_j)(\overline{a}_j\overline{b}_k-\overline{a}_k\overline{b}_j).$$

505*. Demostrar que para cualesquiera dos sistemas de números complejos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ es válida la desigualdad

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right)\geqslant\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\overline{b}_k\right|^2,$$

con la particularidad de que el signo de igualdad aparece cuando y sólo cuando los números de uno de los sistemas dados se diferencian de los números del otro solamente por un factor numérico.

506*. Se denomina determinante recíproco (o adjunto) con respecto al determinante D de orden $n>1$, el determinante D' obtenido de D, sustituyendo todos los elementos por sus cofactores (conservando la disposición precedente).

Demostrar que

$$D'=D^{n-1} \tag{1}$$

507*. Sea M el menor de orden m del determinante D, A el cofactor de M, M' el menor del determinante recíproco D', correspondiente al menor M (o sea, formado de los cofactores de los elementos del determinante D que participan en M). Demostrar la igualdad $M'=D^{m-1}A$.

Si quedamos en que el menor complementario para todo el determinante D se considera igual a la unidad, dicha igualdad será una generalización de la del problema anterior (para $m=n$).

508*. Sea C el menor de orden $(n-2)$ obtenido del determinante D, suprimiendo las filas i-ésima y j-ésima y las columnas k-ésima y l-ésima, con la particularidad de que $i<j$ y $k<l$; como siempre, A_{pq} es el ofactor del elemento a_{pq}. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} A_{ik} & A_{il} \\ A_{jk} & A_{jl} \end{vmatrix}=(-1)^{i+j+k+l}\,DC.$$

509*. Mostrar que si el determinante D es nulo, todas las filas (así como las columnas) del determinante recíproco son proporcionales.

510*. Sean a_{ij} el elemento del determinante D de orden n y A'_{ij} el cofactor del elemento correspondiente A_{ij} del determinante D', recíproco al D. Mostrar que $A'_{ij}=D^{n-2}a_{ij}$.

511*. Sean M el menor de orden m del determinante D de orden n, M' el correspondiente menor M del determinante recíproco D' y A' el cofactor del menor M'. Demostrar que $A'=D^{n-m-1}M$. Ello es la generalización del problema precedente.

512*. Sabiendo los menores de todos los elementos del determinante D, diferente de cero, hallar sus elementos.

513*. Sea

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$
$$p = x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Mostrar que

$$\begin{vmatrix} n+1 & s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_{n+1} \\ s_2 & s_3 & s_4 & \ldots & s_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \ldots & s_{2n} \end{vmatrix} = p^2 \begin{vmatrix} n & s_1 & s_2 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \ldots & s_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

514. Mostrar que si

$$D(x) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn}-x \end{vmatrix},$$

el producto $D(x) \cdot D(-x)$ puede representarse en forma de

$$\begin{vmatrix} A_{11}-x^2 & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}-x^2 & \ldots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn}-x^2 \end{vmatrix},$$

donde ningún A_{ij} depende de x. Hallar la expresión de A_{ij} mediante a_{kl}.

515*. Demostrar, multiplicando los determinantes, que al conmutar dos filas (o columnas), el determinante varía de signo.

516*. Demostrar, multiplicando los determinantes, que el determinante no varía si a una de sus filas (columnas) se le suma otra fila (columna), multiplicada por un número c.

517*. Mostrar que el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_3 & \cos\varphi_2 \\ \cos\varphi_3 & 1 & \cos\varphi_1 \\ \cos\varphi_2 & \cos\varphi_1 & 1 \end{vmatrix}$$ es igual a cero si $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0$.

518*. Sean l_1, l_2, l_3 y m_1, m_2, m_3 los cosenos de los ángulos entre dos semirrectas y los ejes ortogonales de coordenadas y φ el ángulo entre esas semirrectas. Demostrar que $\operatorname{sen}^2\varphi = (l_1 m_2 - l_2 m_1)^2 + (l_2 m_3 - l_3 m_2)^2 + (l_3 m_1 - l_1 m_3)^2$.

519. Sean α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; α_3, β_3, γ_3 los ángulos entre las tres semirrectas L_1, L_2, L_3 y los ejes ortogonales de coordenadas y supongamos que los ángulos de dichas semirrectas sean entre sí

$\varphi_1 = \angle(L_2, L_3)$, $\varphi_2 = \angle(L_3, L_1)$ y $\varphi_3 = \angle(L_1, L_2)$. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix}^2 =$$

$$= 1 - \cos^2\varphi_1 - \cos^2\varphi_2 - \cos^2\varphi_3 + 2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3.$$

520*. Sean (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) las coordenadas rectangulares de los puntos M_1, M_2 y M_3 en un plano. Mostrar que el determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

no varía al girar los ejes de coordenadas y trasladar el origen de coordenadas. Utilizando lo expuesto, aclarar su sentido geométrico.

521*. Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) las coordenadas rectangulares de dos puntos M_1 y M_2 en un plano. Después de esclarecer el sentido geométrico del determinante $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$, saber si varía éste al girar los ejes y trasladar el origen de coordenadas.

522*. Después de calcular el producto de los determinantes

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & R \\ x_2 & y_2 & R \\ x_3 & y_3 & R \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -x_1 & -y_1 & R \\ -x_2 & -y_2 & R \\ -x_3 & -y_3 & R \end{vmatrix},$$

obtener la expresión para el radio del círculo circunscrito a través de los lados a, b, c y el área S del triángulo.

523*. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ respectivamente los cosenos de los ángulos que forman tres semirrectas ortogonales dos a dos OA, OB, OC con los ejes del sistema de coordenadas rectangular Ox, Oy, Oz. Demostrar que el determinante $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \pm 1$, con la particularidad de que el signo más tendrá lugar en caso de una misma orientación de los triedros $OABC$ y $Oxyz$ (ello significa la posibilidad de hacer coincidir OA con Ox, OB con Oy y OC con Oz, al girar la figura $OABC$) y el signo menos, en caso de una orientación opuesta (lo que significa que al coincidir OA con Ox y OB con OY, las semirrectas OC y Oz tendrán direcciones contrarias).

524*. Sean (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) y (x_3, y_3, z_3) las coordenadas de tres puntos M_1, M_2 y M_3 en el espacio. Mostrar que el determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

no varía, al girar el sistema de coordenadas (que se supone rectangular), y esclarecer su sentido geométrico.

525*. Hallar el volumen V del paralelepípedo a través de las longitudes a, b, c de sus aristas que pasan por un vértice y los ángulos α, β, γ que forman esas aristas. (El ángulo α está formado por las aristas de longitudes b y c; β se forma por c y a; γ está formado por a y b.)

526*. Sean l_1, l_2, l_3; m_1, m_2, m_3; n_1, n_2, n_3 los cosenos de los ángulos de las semirrectas OA, OB, OC, respectivamente, con los semiejes positivos del sistema de coordenadas rectangular Ox, Oy, Oz.

Demostrar que para el carácter coplanar de las semirrectas OA, OB y OC (o sea, para situarlas en un mismo plano) es necesario y suficiente que se cumpla la condición

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = 0.$$

527*. Sean (x_i, y_i, z_i) las coordenadas rectangulares del punto M_i del espacio ($i = 1, 2, 3, 4$). Después de mostrar que el determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

no varía al trasladar el origen de coordenadas, esclarecer su sentido geométrico.

528*. Multiplicando los determinantes

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & R \\ x_2 & y_2 & z_2 & R \\ x_3 & y_3 & z_3 & R \\ x_4 & y_4 & z_4 & R \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} -x_1 & -y_1 & -z_1 & R \\ -x_2 & -y_2 & -z_2 & R \\ -x_3 & -y_3 & -z_3 & R \\ -x_4 & -y_4 & -z_4 & R \end{vmatrix},$$

obtener la expresión para el radio de una esfera circunscrita alrededor de un tetraedro, mediante el volumen y la arista de éste. Hallar a partir de la expresión obtenida, en particular, el radio de la esfera, circunscrita alrededor de un tetraedro regular, cuya longitud de la arista es a.

§ 8. Diferentes problemas

529*. Mostrar que el determinante de orden n admite la siguiente definición axiomática (equivalente a la corriente).

A cualquier fila de n números [1]) la llamaremos vector y la designaremos por una letra negrilla. La adición de dos vectores y la multiplicación del vector por un número se determinan, como siempre,

---

[1]) En lugar de números pueden examinarse también los elementos de cualquier campo P.

es decir, si

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \text{y} \quad b = (b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

entonces

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n),$$

si c es un número, $ca = (ca_1, ca_2, \ldots, ca_n)$.

La función $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de n vectores con valores numéricos se denomina lineal por cada argumento (o más breve, polilineal) si

$$f(a_1, \ldots, c'a_i' + c''a_i'', \ldots, a_n) = \\ = c'f(a_1, \ldots, a_i', \ldots, a_n) + c''f(a_1, \ldots, a_i'', \ldots, a_n) \quad (\alpha)$$

para cualesquiera vectores que figuran aquí, cualesquiera números c', c'' y cualquier $i = 1, 2, \ldots, n$. Prosiguiendo, denominaremos función que posee la propiedad de anularse si

$$f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n) = 0 \quad \text{para} \quad a_i = a_j; \qquad (\beta)$$
$$i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad i \neq j.$$

Sea e_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) un vector que tiene en el i-ésimo lugar la unidad y en todos los demás, ceros. La función $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ se llama normalizada si

$$f(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1. \qquad (\gamma)$$

Supongamos que se da una matriz cuadrada de orden n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

y $|A|$ es su determinante en el sentido corriente, o sea,

$$|A| = \sum (-1)^s a_{1i_1}, a_{2i_2} \ldots a_{ni_n},$$

donde la suma se toma por todas las permutaciones $i_1, i_2, \ldots, i_n$ de los números $1, 2, \ldots, n$ y s es el número de inversiones en cada permutación.

Mostrar que

1) el determinante $|A|$ como función de las filas de la matriz A posee las propiedades (α), (β) y (γ);

2) cualquier función de n vectores, que posee las propiedades (α) y (β), satisface la igualdad $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = |A| \times \times f(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, donde A es la matriz con las filas $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

3) cualquier función $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ que posee las propiedades (α), (β) y (γ), es igual al determinante $|A|$ de la matriz A con las filas $a_1, a_2, \ldots, a_n$. En otras palabras, el determinante $|A|$ de la matriz A es la única función polilineal, normalizada de sus filas que posee la propiedad de anularse.

530*. Usando la afirmación 2) del problema anterior, demostrar el teorema de la multiplicación de los determinantes.

531. Mostrar que para las funciones de n vectores por encima del campo de la característica diferente de 2, existiendo la propiedad (α), la (β) es equivalente a una función de signo variable, o sea,

$$f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n) = -f(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots, a_n) \qquad (\beta')$$

para cualesquiera vectores e $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$. Dar un ejemplo de una función de n vectores por encima del campo P de la característica igual a 2 que posee las propiedades (α), (β') y (γ), pero no posee la (β).

532*. Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \ldots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6 & \ldots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^9 & \ldots & \varepsilon^{3(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \varepsilon^{3(n-1)} & \ldots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{vmatrix}, \text{ donde } \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}.$$

533*. ¿Cómo variará el determinante si en él se separan k filas (o columnas) y de cada una de ellas se restan todas las demás filas elegidas?

534. El determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \ldots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \ldots & a_{2n}+x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \ldots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

representarlo en forma de un polinomio situado según las potencias de x.

535*. Demostrar que la suma de los cofactores de todos los elementos del determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

es igual al determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \ldots & a_{2n}-a_{1n} \\ a_{31}-a_{11} & a_{32}-a_{12} & \ldots & a_{3n}-a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \ldots & a_{nn}-a_{1n} \end{vmatrix}.$$

536*. Demostrar que la suma de los cofactores de todos los elementos del determinante no varía si a todos los elementos se les añade un mismo número.

537*. Demostrar que si todos los elementos de cualquier fila (o columna) del determinante son iguales a la unidad, la suma de los cofactores de todos los elementos de éste será igual al propio determinante.

538. Demostrar que el determinante antisimétrico de orden par no varía si a todos sus elementos se les añade un mismo número.

539*. Establecer la siguiente relación entre los continuantes (la expresión extendida del continuante se da en el problema 420)

$$(a_1\ a_2\ \dots\ a_n)=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix}$$

con las fracciones continuas:

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\dots+\cfrac{1}{a_n}}}=\frac{(a_1\ a_2\ \dots\ a_n)}{(a_2\ a_3\ \dots\ a_n)}.$$

540*. Supongamos que se dan dos determinantes:

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ de orden } n$$

$$B=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pp} \end{vmatrix} \text{ de orden } p.$$

Compongamos un determinante de orden np:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & \dots & a_{1n}b_{11} & a_{11}b_{12} & \dots & a_{1n}b_{12} & \dots & a_{11}b_{1p} & \dots & a_{1n}b_{1p} \\ a_{21}b_{11} & \dots & a_{2n}b_{11} & a_{21}b_{12} & \dots & a_{2n}b_{12} & \dots & a_{21}b_{1p} & \dots & a_{2n}b_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}b_{11} & \dots & a_{nn}b_{11} & a_{n1}b_{12} & \dots & a_{nn}b_{12} & \dots & a_{n1}b_{1p} & \dots & a_{nn}b_{1p} \\ a_{11}b_{21} & \dots & a_{1n}b_{21} & a_{11}b_{22} & \dots & a_{1n}b_{22} & \dots & a_{11}b_{2p} & \dots & a_{1n}b_{2p} \\ a_{21}b_{21} & \dots & a_{2n}b_{21} & a_{21}b_{22} & \dots & a_{2n}b_{22} & \dots & a_{21}b_{2p} & \dots & a_{2n}b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}b_{21} & \dots & a_{nn}b_{21} & a_{n1}b_{22} & \dots & a_{nn}b_{22} & \dots & a_{n1}b_{2p} & \dots & a_{nn}b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}b_{p1} & \dots & a_{nn}b_{p1} & a_{n1}b_{p2} & \dots & a_{nn}b_{p2} & \dots & a_{n1}b_{pp} & \dots & a_{nn}b_{pp} \end{vmatrix}.$$

Así, pues, la matriz del determinante D consta de p^2 células de n filas y n columnas cada una. La célula que se encuentra en la i-ésima

fila celular y j-ésima columna celular (para cualesquiera i, $j = 1, 2, \ldots, p$), se obtiene de la matriz del determinante A, multiplicando todos sus elementos por b_{ij}. Demostrar que $D = A^p B^n$. El determinante D se denomina producto de Kronecker de los determinantes A y B (véanse los problemas 963 y 965).

541. Demostrar la siguiente regla de desarrollo del determinante rebordeado: si

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

y A_{ij} es el cofactor del elemento a_{ij}, entonces

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & x_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n & z \end{vmatrix} = Dz - \sum_{i,\, j=1}^{n} A_{ij} x_i y_j.$$

542*. Supongamos que los elementos del determinante D son polinomios de las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_s$ con coeficientes numéricos (o de un campo P arbitrario), con la particularidad de que $D = 0$. Demostrar que los cofactores de los elementos del determinante D pueden representarse en forma de $A_{ij} = A_i B_j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, donde todos A_i y B_i son polinomios de $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Hallar dichos polinomios para el determinante Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix},$$

donde a, b, c se toman a título de incógnitas.

543*. Demostrar, usando los dos problemas anteriores, que el determinante antisimétrico de orden par es el cuadrado de cierto polinomio de sus elementos que se encuentran por encima de la diagonal principal.

544*. Mostrar que si en la expresión general del determinante antisimétrico se sustituye cada elemento a_{ji} por $-a_{ij}$, siendo $j > i$, se reducen todos los términos con tales índices, cuyas sustituciones, al desarrollarlas en ciclos, dan por lo menos un ciclo de longitud impar.

545*. Sea D un determinante antisimétrico de orden par n con elementos $a_{ij} = -a_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$). Se denomina *producto de Pfaff del determinante D* el producto

$$\varepsilon a_{i_1,\, i_2} a_{i_3,\, i_4} \ldots a_{i_{n-1},\, i_n},$$

en el cual los índices de los $n/2$ elementos que participan en él, forman una permutación de $i_1, i_2, \ldots, i_n$ de los números $1, 2, \ldots, n$; $\varepsilon =$

$= +1$, si dicha permutación es par, y $\varepsilon = -1$ si ésta es impar. El producto de Pfaff se llama *reducido* si consta sólo de elementos, yacentes en D por encima de la diagonal principal (es decir, si cada elemento posee el primer índice inferior al segundo). Denominaremos *esencial* al término del determinante D si la sustitución de sus índices tiene sólo ciclos de longitud par. Un par de productos de Pfaff reducidos N_1, N_2 (en el orden dado) se llama *correspondiente* a dicho término esencial del determi ante D si se confecciona según este término de la siguiente manera. Supongamos que la sustitución de los índices de dicho término se escribe en ciclos de este modo:

$$(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{h-1}\alpha_h)\ (\beta_1\beta_2 \ldots \beta_{g-1}\beta_g) \ldots (\mu_1\mu_2 \ldots \mu_{k-1}\mu_k), \qquad (1)$$

con la particularidad de que $\alpha_1 = 1$ y cada ciclo, comenzando desde el segundo, empieza por el número mínimo entre los números que no entran en los ciclos precedentes. Construimos los productos de Pfaff

$$N_1' = \varepsilon_1 a_{\alpha_1, \alpha_2} a_{\alpha_3, \alpha_4} \ldots a_{\alpha_{h-1}, \alpha_h} a_{\beta_1, \beta_2} a_{\beta_3, \beta_4} \ldots$$
$$\ldots a_{\beta_{g-1}, \beta_g} \ldots a_{\mu_1, \mu_2} a_{\mu_3, \mu_4} \ldots a_{\mu_{k-1}, \mu_k}$$

y

$$N_2' = \varepsilon_2 a_{\alpha_2, \alpha_3} a_{\alpha_4, \alpha_5} \ldots a_{\alpha_h, \alpha} a_{\beta_2, \beta_3} a_{\beta_4, \beta_5} \ldots a_{\beta_g, \beta_1} \ldots$$
$$\ldots a_{\mu_2, \mu_3} a_{\mu_4, \mu_5} \ldots a_{\mu_k, \mu_1},$$

y luego cada elemento a_{ij}, donde $i > j$ lo sustituimos por $-a_{ji}$.

Varía el signo de ε_1 o de ε_2, respectivamente, pero también cambia la clase de permutación, de modo que después de cada sustitución obtenemos de nuevo un producto de Pfaff. Al ejecutar en N_1' y N_2' las sustituciones indicadas, obtenemos un par de productos de Pfaff reducidos de N_1, N_2, correspondiente al mencionado término esencial D.

Demostrar que:

1) Cualquier par de los productos de Pfaff reducidos (diferentes o iguales) corresponden a uno y sólo a un término esencial del desarrollo general del determinante D. (En un desarrollo general de D los términos obtenidos uno de otro mediante las sustituciones tipo $a_{ij} = -a_{ji}$, se consideran diferentes.) En otras palabras, se establece una correspondencia biunívoca entre todos los términos esenciales y todos los pares de productos de Pfaff reducidos del determinante D.

2) Cada uno de los términos esenciales es igual al producto de los productos de Pfaff reducidos del par que le corresponde.

3) $D = p^2$, donde p es la suma de todos los productos de Pfaff reducidos, denominada agregado de Pfaff o pfaffiano del determinante D.

546*. Demostrar la siguiente fórmula recurrente, cómoda para calcular el agregado de Pfaff, determinado en el problema anterior. Si p_n es un agregado de Pfaff del determinante antisimétrico $D_n = | a_{ij} |$ del orden par $n > 2$, y p_{in} el agregado de Pfaff del determinante D_{in}, obtenido de D_n, restando las filas n-ésima e i-ésima, así como las correspondientes columnas, donde $i = 1, 2, \ldots, n-1$,

entonces

$$p_n = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} p_{in} a_{in}; \quad p_2 = a_{12}.$$

Mostrar que p_{in} se recibe de p_{n-2}, aumentando en 1 todos los índices de los elementos, mayores o iguales a i.

547. Calcular los pfaffianos p_2, p_4, p_6, empleando la fórmula del problema precedente.

548. Haciendo uso de la fórmula del problema 546, hallar la cantidad de sumandos del agregado de Pfaff p_n del determinante antisimétrico D_n del orden par n, o sea, el número de diferentes productos de Pfaff reducidos del determinante D_n (los productos que difieren sólo por el orden de los factores, no se consideran diferentes).

549*. Sean D un determinante antisimétrico del orden impar n con elementos a_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ y M_{ij} el menor del elemento a_{ij}, $p_{i,n+1}$ el agregado de Pfaff del menor M_{ii}. Mostrar que $M_{ij} = p_{i,n+1} p_{j,n+1}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Prosiguiendo, mostrar que a título de polinomios A_i, B_j del problema 542 (a condición de que los elementos D que se encuentran por encima de la diagonal principal se consideran incógnitas $x_1, \ldots, x_s$) pueden tomarse $A_i = (-1)^{i-1} p_{i,n+1}$, $B_j = (-1)^{j-1} p_{j,n+1}$.

Comprobar que para el determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$$

se obtiene, mediante ese procedimiento, el mismo resultado que en el problema 542 (si se toma en consideración que en el problema 542 A_i y B_j se definen con una precisión de hasta la variación de signo de todos esos polinomios).

550*. Demostrar que el determinante de forma general, considerado como un polinomio de sus elementos, tomados en calidad de incógnitas, no se descompone en dos factores, cada uno de los cuales es un polinomio de las mismas incógnitas del grado diferente de cero. En otras palabras, el determinante es un polinomio irreducible de sus elementos y, además, por encima de cualquier campo.

551*. Sean $D = |a_{ij}|$ un determinante del orden $n > 1$, k, cualquier número de $1, 2, \ldots, n$, $\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$; designemos por $s_1, s_2, \ldots, s_{\binom{n}{k}}$ todo género de combinaciones de n números $1, 2, \ldots, n$ según k, numeradas en un orden arbitrario que posteriormente queda invariable (para precisión, los números en cada combinación pueden considerarse situados en orden creciente, aunque en lo sucesivo ello no tiene importancia); μ_{ij} el menor de orden k del determinante D que se encuentra en la intersección de las filas con números de la combinación s_i y de las columnas con números de la combinación s_j, $i, j = 1, 2, \ldots, \binom{n}{k}$; α_{ij} el cofactor del menor μ_{ij} en D. Denominaremos el determinante de

orden $\binom{n}{k}$ que tiene el aspecto

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1\binom{n}{k}} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2\binom{n}{k}} \\ \mu_{\binom{n}{k}1} & \mu_{\binom{n}{k}2} & \cdots & \mu_{\binom{n}{k}\binom{n}{k}} \end{vmatrix},$$

determinante de los menores de orden k del determinante D. Introduzcamos además el determinante $\overline{\Delta}_k$ del orden $\binom{n}{k}$ que se obtiene de Δ_k, sustituyendo cada menor μ_{ij} por su cofactor α_{ij} en D.

Demostrar que:

1) los valores de los determinantes Δ_k y $\overline{\Delta}_k$ no varían, al cambiar la numeración de las combinaciones, o sea, al permutar las combinaciones en una sucesión de $s_1, s_2, \ldots, s_{\binom{n}{k}}$;

2) $\Delta_k = \overline{\Delta}_{n-k}$, lo que es la generalización de la afirmación del problema 242;

3) $\Delta_k\overline{\Delta}_k = D^{\binom{n}{k}}$; 4) $\Delta_k = D^{\binom{n-1}{k-1}}$; 5) $\overline{\Delta}_k = D^{\binom{n-1}{k}}$.

552*. Calcular el determinante $P_n = | p_{ij} |$, en el cual $p_{ij} = 1$ si i divide j, y $p_{ij} = 0$ si i no divide j. Hallar el valor del determinante $Q_n = | q_{ij} |$ en el cual q_{ij} es igual al número de los divisores comunes de i y j.

553*. La función $\varphi(n)$ igual a la cantidad de números de la serie $1, 2, \ldots, n$, primos con n se denomina *función de Euler*. Haciendo uso del problema anterior y del teorema de Gauss de que $n = \sum \varphi(d)$, donde la suma se toma por todos los divisores de d del número n (incluyendo 1 y el propio n), mostrar que el determinante de orden n $D = | d_{ij} |$, donde d_{ij} es el máximo común divisor de los números i y j, es igual a $\varphi(1)\varphi(2)\ldots\varphi(n)$.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

§ 9. Sistemas de ecuaciones resueltos según la regla de Cramer

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando la regla de Cramer:

554. $$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 6. \end{aligned}$$

555. $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 &= 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -3. \end{aligned}$$

556. $$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 &= 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 11, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 &= 40, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 37. \end{aligned}$$

557. $$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 &= 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 &= 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 &= 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 &= 0. \end{aligned}$$

558. $$\begin{aligned} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 2 &= 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 6 &= 0, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

559. $$\begin{aligned} 6x + 5y - 2z + 4t + 4 &= 0. \\ 9x - y + 4z - t - 13 &= 0, \\ 3x + 4y + 2z - 2t - 1 &= 0, \\ 3x - 9y + 2t - 11 &= 0. \end{aligned}$$

560. $$\begin{aligned} 2x - y - 6z + 3t + 1 &= 0, \\ 7x - 4y + 2z - 15t + 32 &= 0, \\ x - 2y - 4z + 9t - 5 &= 0, \\ x - y + 2z - 6t + 8 &= 0. \end{aligned}$$

561. $2x + y + 4z + 8t = -1,$
$x + 3y - 6z + 2t = 3,$
$3x - 2y + 2z - 2t = 8,$
$2x - y + 2z = 4.$

562. $2x - y + 3z = 9,$
$3x - 5y + z = -4,$
$4x - 7y + z = 5.$

563. $2x - 5y + 3z + t = 5,$
$3x - 7y + 3z - t = -1,$
$5x - 9y + 6z + 4t = 7,$
$4x - 6y + 3z + t = 8.$

564*. Dos sistemas de ecuaciones lineales con las mismas incógnitas (no es obligatorio que tengan el mismo número de ecuaciones) se denominan equivalentes si cualquier solución del primer sistema satisface el segundo y viceversa. (Cualesquiera dos sistemas con las mismas incógnitas, cada uno de los cuales, no tiene soluciones, también se consideran equivalentes).

Mostrar que cualquiera de las siguientes transformaciones del sistema de ecuaciones lineales:

a) permutación de dos ecuaciones;

b) multiplicación de ambos miembros de una de las ecuaciones por cualquier número diferente de cero;

c) resta término a término de una ecuación, multiplicada por cualquier número, de la otra convierte dicho sistema de ecuaciones en uno equivalente.

¿Transformará el cambio de numeración de las incógnitas el sistema dado en el equivalente? ¿Es admisible el cambio de numeración de las incógnitas al resolver el sistema de ecuaciones?

565. Demostrar que cualquier sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{1}$$

mediante las transformaciones tipo a), b), c) del problema anterior y el cambio de numeración de las incógnitas, puede reducirse a la siguiente forma

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}y_j = d_i, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{2}$$

que satisface uno y sólo uno de los siguientes tres grupos de condiciones:

a) $c_{ii} \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad c_{ij} = 0$ para $i > j$

(en particular, los coeficientes de las incógnitas en todas las ecuaciones que siguen la n-ésima (siendo $s > n$) son nulos), $d_i = 0$ para $i = n + 1, \ldots, s$ (en ese caso se dice que el sistema se reduce al aspecto triangular);

b) existe un número entero r, $0 \leqslant r \leqslant n - 1$, tal que $c_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$; $c_{ij} = 0$ para $i > j$; $c_{ij} = 0$ para $i > r$ y cualquier j, igual a $1, 2, \ldots, n$; $d_i = 0$ para $i = r + 1, r + 2, \ldots, s$;

c) existe un número entero r, $0 \leqslant r \leqslant n$, tal que $c_{ii} \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, r$; $c_{ij} = 0$ para $i > j$; $c_{ij} = 0$ para $i > r$ y cualquier $j = 1, 2, \ldots, n$. Existe un número entero k, $r + 1 \leqslant k \leqslant s$, tal que $d_k \neq 0$.

Mostrar que si en el sistema (2) se reconstituye la numeración precedente de las incógnitas, se obtiene el sistema equivalente al inicial (1). Luego mostrar que en el caso a) el sistema (2) (así como el (1) también) tiene la única solución; en el caso b) el sistema (2) tiene una cantidad infinita de soluciones con la particularidad de que para cualesquiera valores de las incógnitas $y_{r+1}, \ldots, y_n$ existe el único sistema de valores de las demás incógnitas $y_1, \ldots, y_r$; en el caso c) el sistema (2) no tiene resolución alguna. Este teorema argumenta el método de eliminación de las incógnitas al resolver el sistema de ecuaciones lineales.

566. Mostrar que si el sistema de ecuaciones lineales (1) del problema anterior posee coeficientes enteros, entonces para todas las transformaciones, reduciéndolo al aspecto (2), pueden evitarse los números fraccionarios, de modo que el sistema (2) también tendrá coeficientes enteros.

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones mediante el método de eliminación de las incógnitas:

567.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 &= 3,\\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 &= -3,\\ x_1 + 2x_2 \qquad\quad - 4x_4 &= -3,\\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 &= 22. \end{aligned}$$

568.

$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 - 7 &= 0,\\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 3 &= 0,\\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad\quad + 1 &= 0,\\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 + 7 &= 0. \end{aligned}$$

569.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 \qquad\quad + x_4 + 3 &= 0,\\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 6 &= 0,\\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 \qquad &= 0,\\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - 2 &= 0. \end{aligned}$$

570.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 &= 6,\\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 &= 2,\\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 6,\\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 &= -7. \end{aligned}$$

571.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3 &= 0,\\ 6x_1 + 9x_2 - 2x_3 - x_4 + 4 &= 0,\\ 10x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 3 &= 0,\\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 7 &= 0. \end{aligned}$$

572.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 9x_4 &= 79,\\ 3x_1 + 13x_2 + 18x_3 + 30x_4 &= 263,\\ 2x_1 + 4x_2 + 11x_3 + 16x_4 &= 146,\\ x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 9x_4 &= 92. \end{aligned}$$

573.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 15,\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 35,\\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 + 15x_5 &= 70,\\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 + 35x_5 &= 126,\\ x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 35x_4 + 70x_5 &= 210. \end{aligned}$$

574. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 2,$
$2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 10x_4 + 13x_5 = 12,$
$3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 16x_4 + 21x_5 = 17,$
$2x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 57,$
$x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 10x_5 = 7.$

575*. $6x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 18x_4 + 20x_5 = 14,$
$10x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 24x_4 + 30x_5 = 18,$
$12x_1 + 12x_2 + 13x_3 + 27x_4 + 35x_5 = 32,$
$8x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 15x_4 + 20x_5 = 16,$
$4x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 15x_4 + 15x_5 = 11.$

576. $x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 9x_5 + 9 = 0,$
$2x_1 + 2x_2 + 17x_3 + 17x_4 + 82x_5 + 146 = 0,$
$2x_1 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 + 10 = 0,$
$x_2 + 4x_3 + 12x_4 + 27x_5 + 26 = 0,$
$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 10x_4 - 37 = 0.$

577. $5x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 14x_4 = 21,$
$5x_1 - x_2 + 8x_3 - 13x_4 + 3x_5 = 12,$
$10x_1 + x_2 - 2x_3 + 7x_4 - x_5 = 29,$
$15x_1 + 3x_2 + 15x_3 + 9x_4 + 7x_5 = 130,$
$2x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 7x_5 = -13.$

578.
$2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5,$
$x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3,$
$x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1,$
$5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12.$

579.
$2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1,$
$8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3,$
$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3,$
$2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3.$

580.
$4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8,$
$3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7,$
$2x_1 - x_2 - 5x_4 = 6,$
$5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1.$

581.
$2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3,$
$4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2,$
$2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1,$
$2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5.$

582. Mostrar que el polinomio de grado n se determina completamente por sus valores para valores $n + 1$ de la indeterminada. Con más precisión, mostrar que para cualesquiera números $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, que se difieren entre sí, y cualesquiera números $y_0, y_1, \ldots, y_n$ existe uno y sólo un polinomio $f(x)$ de grado $\leqslant n$, para el cual

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

583. Usando el problema anterior, demostrar la equivalencia de las dos definiciones de la igualdad de los polinomios de una indeterminada [1]) con coeficientes numéricos (o coeficientes de cualquier cuerpo conmutativo infinito):

1) dos polinomios se llaman iguales si son iguales sus coeficientes de cada par de términos del mismo grado (definición habitual aprobada en el álgebra);

[1]) Una afirmación análoga para los polinomios de cualquier número de indeterminadas es fácil demostrar mediante la inducción.

2) dos polinomios se denominan iguales si son iguales como funciones, es decir, si para cada valor de la indeterminada, sus valores son iguales (definición habitual aprobada en el análisis).

584. Mostrar que para un cuerpo conmutativo finito de coeficientes las definiciones del problema precedente no son equivalentes (dar un ejemplo).

585. Hallar el polinomio cuadrado $f(x)$, sabiendo que

$$f(1) = -1; \quad f(-1) = 9; \quad f(2) = -3.$$

586. Hallar el polinomio de tercer grado $f(x)$, para el cual

$$f(-1) = 0, \quad f(1) = 4, \quad f(2) = 3, \quad f(3) = 16.$$

587. ¿Qué sentido geométrico tiene la afirmación del problema 582?

588. Hallar la parábola de tercer grado que pasa a través de los puntos (0, 1), (1, −1), (2, 5), (3, 37), con la particularidad de que la dirección asintótica es paralela al eje de ordenadas.

589. Hallar la parábola de cuarto grado que pasa a través de los puntos (5, 0), (−13, 2), (−10, 3), (−2, 1), (14, −1), con la particularidad de que la dirección asintótica es paralela al eje de las abscisas.

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, aplicando en cada caso el procedimiento más adecuado:

590.
$$\begin{aligned} -x + y + z + t &= a, \\ x - y + z + t &= b, \\ x + y - z + t &= c, \\ x + y + z - t &= d. \end{aligned}$$

591*.
$$\begin{aligned} a(x+t) + b(y+z) &= c, \\ a'(y+t) + b'(z+x) &= c', \\ a''(z+t) + b''(x+y) &= c'', \\ x + y + z + t &= d, \end{aligned}$$

con la particularidad de que

$$a \neq b, \ a' \neq b', \ a'' \neq b''.$$

592*.
$$\begin{aligned} ax + by + cz + dt &= p, \\ -bx + ay + dz - ct &= q, \\ -cx - dy + az + bt &= r, \\ -dx + cy - bz + at &= s. \end{aligned}$$

593*.
$$\begin{aligned} x_n + a_1x_{n-1} + a_1^2x_{n-2} + \dots + a_1^{n-1}x_1 + a_1^n &= 0, \\ x_n + a_2x_{n-1} + a_2^2x_{n-2} + \dots + a_2^{n-1}x_1 + a_2^n &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n + a_nx_{n-1} + a_n^2x_{n-2} + \dots + a_n^{n-1}x_1 + a_n^n &= 0, \end{aligned}$$

donde $a_1, a_2, \dots, a_n$ son distintos números.

594.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= 1, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n &= b, \\ a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \dots + a_n^2x_n &= b^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \dots + a_n^{n-1}x_n &= b^{n-1}, \end{aligned}$$

donde $a_1, a_2, \dots, a_n$ son diferentes números.

595. $x_1 + a_1x_2 + \dots + a_1^{n-1}x_n = b_1,$
$x_1 + a_2x_2 + \dots + a_2^{n-1}x_n = b_2,$
$\dots\dots\dots\dots\dots$
$x_1 + a_nx_2 + \dots + a_n^{n-1}x_n = b_n,$
donde $a_1, a_2, \dots, a_n$ son distintos números.

596. $x_1 + x_2 + \dots + x_n = b_1,$
$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b_2,$
$\dots\dots\dots\dots\dots$
$a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \dots + a_n^{n-1}x_n = b_n,$
donde $a_1, a_2, \dots, a_n$ son distintos números.

597. $x_1 + x_2 + \dots + x_n + 1 = 0,$
$2x_1 + 2^2x_2 + \dots + 2^nx_n + 1 = 0,$
$\dots\dots\dots\dots\dots$
$nx_1 + n^2x_2 + \dots + n^nx_n + 1 = 0.$

598. $ax_1 + bx_2 + \dots + bx_n = c_1,$
$bx_1 + ax_2 + \dots + bx_n = c_2,$
$\dots\dots\dots\dots\dots$
$bx_1 + bx_2 + \dots + ax_n = c_n,$
donde $(a - b)[a + (n - 1) b] \neq 0.$

599*. $(3 + 2a_1) x_1 + (3 + 2a_2) x_2 + \dots + (3 + 2a_n) x_n = 3 + 2b,$

$$(1 + 3a_1 + 2a_1^2) x_1 + (1 + 3a_2 + 2a_2^2) x_2 + \dots + (1 + 3a_n + 2a_n^2) x_n = 1 + 3b + 2b^2,$$

$$a_1(1 + 3a_1 + 2a_1^2) x_1 + a_2 (1 + 3a_2 + 2a_2^2) x_2 + \dots + a_n (1 + 3a_n + 2a_n^2) x_n = b (1 + 3b + 2b^2),$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$$a_1^{n-3} (1 + 3a_1 + 2a_1^2) x_1 + a_2^{n-3} (1 + 3a_2 + 2a_2^2) x_2 + \dots + a_n^{n-3} (1 + 3a_n + 2a_n^2) x_n = b^{n-3} (1 + 3b + 2b^2),$$

$$a_1^{n-2} (1 + 3a_1) x_1 + a_2^{n-2} (1 + 3a_1) x_2 + \dots + a_n^{n-2} (1 + 3a_n) x_n = b^{n-2} (1 + 3b).$$

600*. Desarrollando la función $\frac{x}{\ln(1+x)}$ en serie de potencias, obtenemos $\frac{x}{\ln(1+x)} = 1 + h_1x + h_2x^2 + h_3x^3 + \dots$

Mostrar que

$$h_n=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \dots & \frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

601. Se sabe que $\frac{1}{\cos x}=1+\frac{e_1}{2!}x^2+\frac{e_2}{4!}x^4+\frac{e_3}{6!}x^6+\dots$, donde e_1, e_2, e_3, ... son los denominados números de Euler. Mostrar que

$$e_n=(2n)!\begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-4)!} & \frac{1}{(2n-6)!} & \dots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}.$$

602*. En el desarrollo $\frac{x}{e^x-1}=1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\dots$, $b_{2n}=$ $=\frac{(-1)^{n-1}B_n}{(2n)!}$, donde B_n son los denominados números de Bernoulli.

Mostrar que

$$B_n=(-1)^{n+1}(2n)!\begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(2n+1)!} & \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \dots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}.$$

Prosiguiendo, mostrar que para $n > 1$

$$b_{2n-1}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-3)!} & \dots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}=0.$$

603*. Mostrar que el número de Bernoulli B_n, introducido en el problema anterior, puede expresarse mediante los siguientes determinantes de orden n:

$$B_n=\frac{1}{2}(2n)!\begin{vmatrix} \frac{1}{3!} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{3}{5!} & \frac{1}{3!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{5}{7!} & \frac{1}{5!} & \frac{1}{3!} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{2n-1}{(2n+1)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-3)!} & \frac{1}{(2n-5)!} & \dots & \frac{1}{3!} \end{vmatrix},$$

o

$$B_n=2^n(2n)!\begin{vmatrix} \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{2}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{3}{8!} & \frac{1}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{n}{(2n+2)!} & \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-4)!} & \dots & \frac{1}{4!} \end{vmatrix}.$$

604*. Designemos por $s_n(k)$ la suma de las n-ésimas potencias de los números de la serie natural desde 1 hasta $k-1$, es decir, $s_n(k) = 1^n + 2^n + \dots + (k-1)^n$. Después de establecer la igualdad $k^n = 1 + C_n^{n-1}s_{n-1}(k) + C_n^{n-2}s_{n-2}(k) + \dots + C_n^1 s_1(k) + s_0(k)$, demostrar que

$$s_{n-1}(k)=\frac{1}{n!}\begin{vmatrix} k^n & C_n^{n-2} & C_n^{n-3} & \dots & C_n^1 & 1 \\ k^{n-1} & C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-3} & \dots & C_{n-1}^1 & 1 \\ k^{n-2} & 0 & C_{n-2}^{n-3} & \dots & C_{n-2}^1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k^2 & 0 & 0 & \dots & C_2^1 & 1 \\ k & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

605*. Representar en forma de un determinante el n-ésimo coeficiente l_n del desarrollo $\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 + l_1x^2 + l_2x^4 + \ldots + l_nx^{2n} + \ldots$

606. Representar en forma de un determinante el n-ésimo coeficiente f_n del desarrollo $x \operatorname{ctg} x = 1 - f_1x^2 - f_2x^4 - \ldots - f_nx^{2n} - \ldots$

607*. Después de expresar el n-ésimo coeficiente a_n del desarrollo $e^{-x} = 1 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \ldots$ en forma de un determinante, hallar de aquí el valor del determinante.

§ 10. Rango de una matriz. Dependencia lineal de los vectores y de las formas lineales

Hallar el rango de las siguientes matrices, aplicando el método de rebordear los menores:

608. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$. **609.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

610. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. **611.** $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.

612. Hallar los valores de λ, para los cuales la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

tiene el rango mínimo.

¿Cuál será el rango para los λ hallados y cuál será para otros valores de λ?

613. ¿Cuál será el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

para distintos valores de λ?

614. Sean A la matriz de rango r y M_k el menor de orden k que se encuentra en el ángulo superior izquierdo de la matriz A. Demostrar que mediante las permutaciones de las filas entre sí y las columnas entre sí puede lograrse el cumplimiento de las condiciones: $M_1 \neq 0$, $M_2 \neq 0$, $\ldots$, $M_r \neq 0$, mientras que todos los menores del orden superior a r (si, en general, éstos existen) son nulos.

615. Las siguientes *transformaciones de una matriz*:

1) multiplicación de una fila (columna) por un número, distinto de cero;

2) adición de una fila (columna), multiplicada por cualquier número, a otra fila (columna);

3) permutación de dos filas (columnas)

se denominan *elementales*.

Demostrar que las transformaciones elementales no varían el rango de la matriz.

616. Demostrar que la permutación de las filas (columnas) de una matriz puede obtenerse, haciendo las transformaciones de las filas y columnas sólo de los tipos 1) y 2), indicados en el problema anterior.

617. Demostrar que cualquier matriz de rango r puede reducirse, mediante las transformaciones elementales indicadas en el problema 615, a una forma en que los elementos $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{rr} = 1$, y los demás son nulos.

618. Demostrar que mediante las transformaciones elementales sólo de las filas o sólo de las columnas, la matriz cuadrada puede reducirse a la forma «triangular», en la que todos los elementos por un lado de la diagonal principal son nulos, con la particularidad de que los ceros pueden obtenerse, según el deseo, bien por encima de la diagonal principal, bien por abajo de ésta.

Calcular el rango de las siguientes matrices con ayuda de las transformaciones elementales:

619. $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$. **620.** $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$.

621. $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$.

622. $\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$.

623. Demostrar que si la matriz está compuesta de m filas y su rango es r, cualesquiera s de sus filas forman una matriz, cuyo rango no es inferior a $r + s - m$.

624. Demostrar que agregando una fila (o una columna) a la matriz, el rango de ésta bien no varía, o bien aumenta en una unidad.

625. Demostrar que el borrado de una fila (o una columna) de la matriz no varía su rango cuando, y sólo cuando, la fila borrada (o columna) se expresa linealmente a través de las demás filas (columnas).

626. Se denomina *suma de dos matrices* que tienen la misma cantidad de filas y columnas, una matriz, cada elemento de la cual es

igual a la suma de los correspondientes elementos de dichas matrices, es decir, $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$. Demostrar que el rango de la suma de dos matrices no supera la suma de sus rangos.

627. Demostrar que cualquier matriz de rango r puede representarse en forma de una suma de r matrices de rango 1, pero no se puede representar en forma de una suma inferior a r de semejantes matrices.

628. Demostrar que si el rango de la matriz A no varía, al agregarle cada una de las columnas de la matriz B con la misma cantidad de filas, no varía tampoco al agregarle a la matriz A todas las columnas de la matriz B.

629*. Demostrar que si el rango de la matriz A es igual a r, el menor d que se encuentra en la intersección de cualesquiera r filas linealmente independientes y r columnas linealmente independientes de esta matriz, es distinto de cero.

630*. Sean A una matriz cuadrada de orden $n > 1$ y $\hat{A}$ una matriz, recíproca (asociada) de la matriz A. Aclarar cómo varía el rango $\hat{r}$ de la matriz $\hat{A}$ al cambiar el rango r de la matriz A.

631*. Demostrar que el cálculo del rango de una matriz simétrica se reduce al cómputo sólo de los menores principales, o sea, de los menores que se hallan en las filas y columnas con números respectivamente iguales. Demostrar precisamente que:

1) si en la matriz simétrica A de orden n existe el menor principal M_r de orden r, diferente de cero, para el cual todos sus menores principales rebordeantes de órdenes $(r + 1)$ y $(r + 2)$ son nulos, entonces el rango de la matriz A es igual a r (si todos los menores principales son nulos, puede considerarse que el menor principal de orden cero M_0 es igual a la unidad y el teorema queda siendo válida; para $r = n - 1$ no existen menores de orden $r + 2$, pero la afirmación del teorema es justa ya que el rango de A es igual a $n - 1$);

2) el rango de la matriz simétrica es igual al orden superior de los menores principales, distintos de cero, de dicha matriz.

632*. Sean A una matriz simétrica de rango r y M_k el menor de orden k que se encuentra en el ángulo superior izquierdo de la matriz A. (Consideramos que para $k = 0$ $M_0 = 1$). Demostrar que, aplicando cierta permutación de filas y la correspondiente permutación de columnas de la matriz A, puede lograrse que en la serie de menores $M_0 = 1, M_1, M_2, \ldots, M_r$ ningunos dos vecinos sean nulos y $M_r \neq 0$, mientras que todos los menores de orden superior a r (si éstos existen) son iguales a cero.

633*. Demostrar que el rango de una matriz antisimétrica se determina por sus menores principales. A saber:

1) si existe un menor principal de orden r, distinto de cero, para el cual todos los menores principales que lo rebordean del orden $r + 2$ son nulos, el rango de la matriz es igual a r;

2) el rango de una matriz antisimétrica es igual al orden superior de los menores principales, distintos de cero, de dicha matriz.

634*. Sean A una matriz antisimétrica de rango r y M_k un menor de orden k, situado en el ángulo superior izquierdo de la matriz A ($M_0 = 1$). Demostrar que, aplicando cierta permutación de filas y la correspondiente permutación de columnas de la matriz A, puede lograrse que los menores $M_0, M_2, M_4, \ldots, M_r$ sean distintos de cero y los menores $M_1, M_3, \ldots, M_{r-1}$ y todos los menores de orden superior a r (si éstos existen) son nulos.

635. Demostrar que el rango de una matriz antisimétrica es un número par.

636. Hallar la combinación lineal $3\boldsymbol{a}_1 + 5\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3$ de los vectores

$\boldsymbol{a}_1 = (4, 1, 3, -2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 2, -3, 2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (16, 9, 1, -3)$.

637. Hallar el vector $\boldsymbol{x}$ de la ecuación

$$\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + 3\boldsymbol{a}_3 + 4\boldsymbol{x} = 0,$$

donde

$$\boldsymbol{a}_1 = (5, -8, -1, 2), \quad \boldsymbol{a}_2 = (2, -1, 4, -3),$$
$$\boldsymbol{a}_3 = (-3, 2, -5, 4).$$

638. Hallar el vector $\boldsymbol{x}$ de la ecuación

$$3(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{x}) + 2(\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{x}) = 5(\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{x}),$$

donde

$$\boldsymbol{a}_1 = (2, 5, 1, 3), \quad \boldsymbol{a}_2 = (10, 1, 5, 10), \quad \boldsymbol{a}_3 = (4, 1, -1, 1).$$

Aclarar si los siguientes sistemas de vectores son linealmente dependientes o linealmente independientes:

639. $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 3)$,
$\boldsymbol{a}_2 = (3, 6, 7)$.

640. $\boldsymbol{a}_1 = (4, -2, 6)$,
$\boldsymbol{a}_2 = (6, -3, 9)$.

641. $\boldsymbol{a}_1 = (2, -3, 1)$,
$\boldsymbol{a}_2 = (3, -1, 5)$,
$\boldsymbol{a}_3 = (1, -4, 3)$.

642. $\boldsymbol{a}_1 = (5, 4, 3)$,
$\boldsymbol{a}_2 = (3, 3, 2)$,
$\boldsymbol{a}_3 = (8, 1, 3)$.

643. $\boldsymbol{a}_1 = (4, -5, 2, 6)$,
$\boldsymbol{a}_2 = (2, -2, 1, 3)$,
$\boldsymbol{a}_3 = (6, -3, 3, 9)$,
$\boldsymbol{a}_4 = (4, -1, 5, 6)$.

644. $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 0, 2, 5)$,
$\boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 0, 3, 4)$,
$\boldsymbol{a}_3 = (0, 0, 1, 4, 7)$.
$\boldsymbol{a}_4 = (2, -3, 4, 11, 12)$.

645. Si de las coordenadas de cada vector del sistema dado de vectores de un mismo número de mediciones elegimos las coordenadas, situadas en lugares determinados (los mismos para todos los vectores), conservando su orden, obtendremos el segundo sistema de vectores que se denominará *acortado* con relación al primer sistema. Mientras que este último se denominará *extendido* con relación al segundo. Demostrar que cualquier sistema acortado para un sistema de vectores linealmente dependiente es linealmente dependiente, y cualquier sistema extendido para un sistema de vectores linealmente independiente es linealmente independiente.

646. Demostrar que un sistema de vectores que contiene dos vectores iguales es linealmente dependiente.

647. Demostrar que un sistema de vectores, cuyos dos vectores se diferencian por un factor escalar es linealmente dependiente.

648. Demostrar que el sistema de vectores que contiene vector nulo es linealmente dependiente.

649. Demostrar que si una parte del sistema de vectores es linealmente dependiente, todo el sistema también es linealmente dependiente.

650. Demostrar que cualquier parte de un sistema de vectores linealmente independiente es por sí misma linealmente independiente.

651*. Supongamos que se da un sistema de vectores

$$a_i = (\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \ldots, \alpha_{i,n}) \quad (i = 1, 2, \ldots, s; \ s \leqslant n).$$

Demostrar que si $|\alpha_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{s} |\alpha_{ij}|$, dicho sistema de vectores es linealmente independiente.

652. Demostrar que si los tres vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente dependientes y el vector a_3 no se expresa linealmente a través de los vectores a_1 y a_2, estos últimos se diferencian entre sí sólo por un factor numérico.

653. Demostrar que si los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_k$ son linealmente independientes, y los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_k, b$ son linealmente dependientes, el vector b se expresa linealmente a través de los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

654. Usando el problema anterior, demostrar que cada uno de los vectores de dicho sistema se expresa linealmente mediante cualquier subsistema linealmente independiente de ese sistema, subsistema que contiene una cantidad máxima de vectores.

655. Demostrar que un sistema ordenado de vectores $a_1, a_2, \ldots, \ldots, a_k$, distintos de cero, es linealmente independiente cuando y sólo cuando ninguno de esos vectores se expresa linealmente mediante los precedentes.

656*. Demostrar que si delante de un sistema ordenado de vectores linealmente independiente $a_1, a_2, \ldots, a_k$ se pone un vector más b, entonces no más de un vector del sistema obtenido se expresará linealmente por medio de los anteriores.

657*. Demostrar que si los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_r$ son linealmente independientes y se expresan linealmente a través de los vectores $b_1, b_2, \ldots, b_s$, entonces $r \leqslant s$.

658*. Se denomina *base del sistema de vectores dado* un subsistema que posee las siguientes propiedades:

1) este subsistema es linealmente independiente;

2) cualquier vector de todo el sistema se expresa linealmente mediante los vectores de este subsistema.

Demostrar que:

a) todas las bases de dicho sistema contienen la misma cantidad de vectores;

b) el número de vectores de cualquier base es el número máximo de vectores linealmente independientes del sistema dado; este número se denomina rango de dicho sistema;

c) si dicho sistema de vectores posee el rango r, cualesquiera r vectores linealmente independientes forman la base de este sistema.

659*. Demostrar que cualquier subsistema linealmente independiente del sistema dado puede completarse hasta la base de ese sistema.

660. Dos sistemas de vectores se denominan *equivalentes* si cada uno de los vectores de un sistema se expresa linealmente a través de los vectores del otro y viceversa. Demostrar que dos equivalentes sistemas linealmente independientes contienen la misma cantidad de vectores.

661. Demostrar que si los vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_h$ se expresan linealmente a través de los vectores $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_l$, el rango del primer sistema no supera el del segundo.

662. Se dan los vectores:

$$\boldsymbol{a}_1 = (0, 1, 0, 2, 0), \quad \boldsymbol{a}_2 = (7, 4, 1, 8, 3),$$
$$\boldsymbol{a}_3 = (0, 3, 0, 4, 0), \quad \boldsymbol{a}_4 = (1, 9, 5, 7, 1),$$
$$\boldsymbol{a}_5 = (0, 1, 0, 5, 0).$$

¿Es posible elegir los números c_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, 5)$ de modo que los vectores

$$\boldsymbol{b}_1 = c_{11}\boldsymbol{a}_1 + c_{12}\boldsymbol{a}_2 + c_{13}\boldsymbol{a}_3 + c_{14}\boldsymbol{a}_4 + c_{15}\boldsymbol{a}_5,$$
$$\boldsymbol{b}_2 = c_{21}\boldsymbol{a}_1 + c_{22}\boldsymbol{a}_2 + c_{23}\boldsymbol{a}_3 + c_{24}\boldsymbol{a}_4 + c_{25}\boldsymbol{a}_5,$$
$$\boldsymbol{b}_3 = c_{31}\boldsymbol{a}_1 + c_{32}\boldsymbol{a}_2 + c_{33}\boldsymbol{a}_3 + c_{34}\boldsymbol{a}_4 + c_{35}\boldsymbol{a}_5,$$
$$\boldsymbol{b}_4 = c_{41}\boldsymbol{a}_1 + c_{42}\boldsymbol{a}_2 + c_{43}\boldsymbol{a}_3 + c_{44}\boldsymbol{a}_4 + c_{45}\boldsymbol{a}_5,$$
$$\boldsymbol{b}_5 = c_{51}\boldsymbol{a}_1 + c_{52}\boldsymbol{a}_2 + c_{53}\boldsymbol{a}_3 + c_{54}\boldsymbol{a}_4 + c_{55}\boldsymbol{a}_5$$

sean linealmente independientes?

663. Demostrar que si, y sólo si, el vector $\boldsymbol{b}$ se expresa linealmente mediante los vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, el rango del último sistema de vectores no varía, añadiéndole el vector $\boldsymbol{b}$.

664*. Demostrar que:

1) dos sistemas equivalentes de vectores tienen el mismo rango;

2) el teorema inverso a la afirmación 1) es incorrecto.

Sin embargo, es válida la afirmación:

3) si dos sistemas de vectores tienen el mismo rango y uno de ellos se expresa linealmente a través del otro, esos sistemas son equivalentes.

Hallar todos los valores de λ, para los cuales el vector $\boldsymbol{b}$ se expresa linealmente mediante los vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_s$:

665. $a_1 = (2, \ 3, \ 5)$,
$a_2 = (3, \ 7, \ 8)$,
$a_3 = (1, \ -6, \ 1)$,
$b = (7, \ -2, \ \lambda)$.

666. $a_1 = (4, \ 4, \ 3)$,
$a_2 = (7, \ 2, \ 1)$,
$a_3 = (4, \ 1, \ 6)$,
$b = (5, \ 9, \ \lambda)$.

667. $a_1 = (3, \ 4, \ 2)$,
$a_2 = (6, \ 8, \ 7)$,
$b = (9, \ 12, \ \lambda)$.

668. $a_1 = (3, \ 2, \ 5)$,
$a_2 = (2, \ 4, \ 7)$,
$a_3 = (5, \ 6, \ \lambda)$,
$b = (1, \ 3, \ 5)$.

669. $a_1 = (3, \ 2, \ 6)$,
$a_2 = (7, \ 3, \ 9)$,
$a_3 = (5, \ 1, \ 3)$,
$b = (\lambda, \ 2, \ 5)$.

670. Explicar las respuestas de los problemas 665—669 desde el punto de vista de la disposición de dichos vectores en el espacio.

671. Utilizando el problema 657, demostrar que más de n vectores n-dimensionales siempre son linealmente dependientes.

672. Hallar todos los subsistemas máximos, linealmente independientes, del sistema de vectores:

$$a_1 = (4, \ -1, \ 3, \ -2), \quad a_2 = (8, \ -2, \ 6, \ -4),$$
$$a_3 = (3, \ -1, \ 4, \ -2), \quad a_4 = (6, \ -2, \ 8, \ -4).$$

Hallar todas las bases de los sistemas de vectores:

673. $a_1 = (1, \ 2, \ 0, \ 0)$,
$a_2 = (1, \ 2, \ 3, \ 4)$,
$a_3 = (3, \ 6, \ 0, \ 0)$.

674. $a_1 = (1, \ 2, \ 3, \ 4)$,
$a_2 = (2, \ 3, \ 4, \ 5)$,
$a_3 = (3, \ 4, \ 5, \ 6)$,
$a_4 = (4, \ 5, \ 6, \ 7)$.

675. $a_1 = (2, \ 1, \ -3, \ 1)$,
$a_2 = (4, \ 2, \ -6, \ 2)$,
$a_3 = (6, \ 3, \ -9, \ 3)$,
$a_4 = (1, \ 1, \ 1, \ 1)$.

676. $a_1 = (1, \ 2, \ 3)$,
$a_2 = (2, \ 3, \ 4)$,
$a_3 = (3, \ 2, \ 3)$,
$a_4 = (4, \ 3, \ 4)$,
$a_5 = (1, \ 1, \ 1)$.

677. ¿En qué caso el sistema de vectores posee base única?

678. ¿Cuántas bases tiene el sistema de $k + 1$ vectores de rango k que contiene vectores proporcionales, distintos de cero?

Hallar alguna base del sistema de vectores y expresar todos los vectores del sistema que no entran en dicha base, mediante los vectores de la base:

679. $a_1 = (5, \ 2, \ -3, \ 1)$,
$a_2 = (4, \ 1, \ -2, \ 3)$,
$a_3 = (1, \ 1, \ -1, \ -2)$,
$a_4 = (3, \ 4, \ -1, \ 2)$.

680. $a_1 = (2, \ -1, \ 3, \ 5)$,
$a_2 = (4, \ -3, \ 1, \ 3)$,
$a_3 = (3, \ -2, \ 3, \ 4)$,
$a_4 = (4, \ -1, \ 15, \ 17)$,
$a_5 = (7, \ -6, \ -7, \ 0)$.

681. $a_1 = (1, \quad 2, \quad 3, \quad -4)$,
$a_2 = (2, \quad 3, \quad -4, \quad 1)$,
$a_3 = (2, \quad -5, \quad 8, \quad -3)$,
$a_4 = (5, \quad 26, \quad -9, \quad -12)$,
$a_5 = (3, \quad -4, \quad 1, \quad 2)$.

682*. Supongamos que se da un sistema de vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de una misma cantidad de dimensiones. Se denomina sistema principal de relaciones lineales de dicho sistema de vectores el sistema de relaciones tipo

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

que posee estas dos propiedades:

a) ese sistema de relaciones es linealmente independiente, lo que significa la independencia lineal del sistema de vectores

$$a_i = (\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \ldots, \alpha_{i,n}) \quad (i = 1, 2, \ldots, s);$$

b) cualquier dependencia lineal de los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una consecuencia de las relaciones del sistema dado, es decir, si $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = 0$, el vector $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ es una combinación lineal de los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_s$. Demostrar que:

1) si $x_1, x_2, \ldots, x_r$ es la base de dicho sistema de vectores y $x_i = \sum_{j=1}^{r} \lambda_{i,j} x_j$, $i = r+1, r+2, \ldots, n$, entonces uno de los sistemas principales de las relaciones lineales del sistema dado de vectores será el sistema de relaciones $x_i - \sum_{j=1}^{r} \lambda_{i,j} x_j = 0$ $(i = r+1, r+2, \ldots, n)$;

2) todos los sistemas principales de relaciones lineales contienen el mismo número de relaciones;

3) si cierto sistema principal de relaciones lineales tiene s relaciones, cualquier sistema de s relaciones lineales linealmente independientes del mismo sistema de vectores es también un sistema principal de relaciones lineales;

4) si el sistema de relaciones $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} x_j = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ es un sistema principal de relaciones lineales entonces el sistema de relaciones $\sum_{j=1}^{n} \beta_{i,j} x_j = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ será un sistema principal de relaciones lineales cuando, y sólo cuando, suponiendo que $a_i = (\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \ldots, \alpha_{i,n})$, $i = 1, 2, \ldots, s$, $b_i = (\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \ldots, \beta_{i,n})$, $i = 1, 2, \ldots, s$, tenemos

$$b_i = \sum_{j=1}^{s} \gamma_{i,j} a_j \quad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

donde los coeficientes $\gamma_{i,j}$ forman un determinante de orden s, distinto de cero.

Usando la multiplicación de las matrices, las últimas s igualdades vectoriales pueden escribirse en forma de una igualdad matricial

$$B = CA, \text{ donde } A = (\alpha_{i,j})_{s,n}, \quad B = (\beta_{i,j})_{s,n} \text{ y } C = (\gamma_{i,j})_s.$$

C es una matriz regular de orden s.

Después de determinar el sistema principal de relaciones lineales para los sistemas de formas lineales como fue hecho en el problema 682 para el sistema de vectores, hallar el sistema principal de relaciones lineales para el sistema de formas lineales:

683. $f_1 = 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4,$
$f_2 = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4,$
$f_3 = 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_4,$
$f_4 = x_1 + 7x_3 + 11x_4.$

684. $f_1 = 8x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4,$
$f_2 = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4,$
$f_3 = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4,$
$f_4 = x_1 - x_2 - x_3 + 7x_4,$
$f_5 = 5x_2 + 4x_3 - 17x_4.$

685. $f_1 = 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5,$
$f_2 = 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5,$
$f_3 = 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5,$
$f_4 = 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5.$

686. $f_1 = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4,$
$f_2 = x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 8x_4,$
$f_3 = 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4,$
$f_4 = 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 7x_4,$
$f_5 = 6x_1 - 7x_2 - x_4.$

687. $f_1 = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5,$
$f_2 = 6x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 2x_4 + 8x_5,$
$f_3 = 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5,$
$f_4 = 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 3x_4 + 5x_5,$
$f_5 = 8x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 4x_4 + 2x_5.$

688*. Supongamos que se da un sistema de formas lineales

$$f_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k \quad (j = 1, 2, \ldots, s) \tag{1}$$

y el segundo sistema de formas lineales que dependen linealmente de las formas del primer sistema

$$\varphi_j = \sum_{j=1}^{s} c_{ij}f_j \quad (i = 1, 2, \ldots, t). \tag{2}$$

Demostrar que el rango del sistema de formas (2) no supera el del sistema de formas (1). Si $s = t$ y el determinante $|c_{ij}|_s$ difiere de cero, los rangos de ambos sistemas de formas lineales coinciden.

§ 11. Sistemas de ecuaciones lineales

Investigar la compatibilidad y hallar la solución general y una particular del sistema de ecuaciones:

689. $$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 &= 2. \end{aligned}$$

690. $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 &= 1. \end{aligned}$$

691. $$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 &= 13. \end{aligned}$$

692. $$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 &= 3. \end{aligned}$$

693. $$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 &= 12. \end{aligned}$$

694. $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 4. \end{aligned}$$

695. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 &= 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 &= 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 &= 18. \end{aligned}$$

696. $$\begin{aligned} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 &= -8. \end{aligned}$$

697. $$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 &= 7. \end{aligned}$$

698. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 &= 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 &= 2. \end{aligned}$$

699. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 2,\\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 3,\\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 &= 9,\\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 1. \end{aligned}$$

700. $$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 1,\\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 &= 3,\\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 \qquad &= -7,\\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 2. \end{aligned}$$

701. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 &= 4,\\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 &= 5,\\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 &= 11,\\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 &= 6. \end{aligned}$$

702. $$\begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 5,\\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 4,\\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0,\\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 1, \end{aligned}$$

703. $$\begin{aligned} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 21,\\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 10,\\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 8,\\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 &= 15,\\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 18. \end{aligned}$$

704. $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4,\\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 5,\\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 2,\\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 &= 1,\\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 &= 7. \end{aligned}$$

705*. Demostrar que:

a) cualquier sistema de s ecuaciones lineales con n incógnitas, cuya matriz formada de los coeficientes de las incógnitas posee el rango r, puede reducirse, cambiando la numeración de las ecuaciones e incógnitas, al aspecto:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s), \tag{1}$$

que posee las propiedades

$$m_0 = 1, \quad m_1 \neq 0, \quad m_2 \neq 0, \ \ldots, \ m_r \neq 0, \tag{2}$$

donde m_k es el menor de orden k que se encuentra en el ángulo superior izquierdo de la matriz formada de los coeficientes de las incógnitas del sistema (1);

b) el sistema de ecuaciones (1) que posee las propiedades (2), mediante una serie de restas de sus ecuaciones, multiplicadas por números adecuados, de las posteriores ecuaciones, puede reducirse a un

sistema equivalente

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j = d_i \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ s), \tag{3}$$

que posee las propiedades:

$$\left.\begin{aligned} c_{ii} &\neq 0 \quad \text{para } i=1,\ 2,\ \ldots,\ r, \\ c_{ij} &= 0 \quad \text{para } j<i\leqslant r, \text{ así como} \\ & \qquad\ \text{para } i>r \text{ y } j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Si para $i = r+1,\ r+2,\ \ldots,\ s$ $d_i = 0$, los sistemas (3) y (1) son compatibles, con la particularidad de que, siendo $r = n$, existe una solución única, y para $r < n$ hay una cantidad infinita de soluciones.

En el último caso las incógnitas independientes son $x_{r+1}, \ldots, x_n$. De la r-ésima ecuación x_r puede expresarse mediante las incógnitas independientes. Después de poner esa fórmula en la $(r-1)$-ésima ecuación, hallaremos x_{r-1} a través de las incógnitas independientes, etc.

Por fin, mediante las incógnitas independientes hallaremos la expresión de x_1 a partir de la primera ecuación.

Las fórmulas obtenidas de $x_1, x_2, \ldots, x_r$ mediante las incógnitas independientes $x_{r+1}, \ldots, x_n$ representan en sí la solución general de los sistemas (3) y (1). Esto significa que para cualesquiera valores de las incógnitas independientes obtendremos de las expresiones halladas las soluciones de los sistemas (3) y (1) y toda solución de estos sistemas puede obtenerse precisamente por este procedimiento para los valores adecuados de las incógnitas independientes.

Si $d_i \neq 0$ aunque sea sólo para un valor de $i > r$, los sistemas (3) y (1) son incompatibles.

El método expuesto de investigación y resolución de un sistema de ecuaciones lineales lleva el nombre de método de eliminación de las incógnitas (compárese con el problema 565).

Haciendo uso del método de eliminación de las incógnitas, indicado en el problema 705, investigar la compatibilidad y hallar la solución general de los sistemas de ecuaciones (si el sistema inicial tiene coeficientes enteros, durante la eliminación de las incógnitas pueden evitarse las fracciones):

706.
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+x_4&=3,\\ x_1+4x_2+5x_3+2x_4&=2,\\ 2x_1+9x_2+8x_3+3x_4&=7,\\ 3x_1+7x_2+7x_3+2x_4&=12,\\ 5x_1+7x_2+9x_3+2x_4&=20. \end{aligned}$$

707.
$$\begin{aligned} 12x_1+14x_2-15x_3+23x_4+27x_5&=5,\\ 16x_1+18x_2-22x_3+29x_4+37x_5&=8,\\ 18x_1+20x_2-21x_3+32x_4+41x_5&=9,\\ 10x_1+12x_2-16x_3+20x_4+23x_5&=4. \end{aligned}$$

708. $10x_1 + 23x_2 + 17x_3 + 44x_4 = 25,$
$15x_1 + 35x_2 + 26x_3 + 69x_4 = 40,$
$25x_1 + 57x_2 + 42x_3 + 108x_4 = 65,$
$30x_1 + 69x_2 + 51x_3 + 133x_4 = 95.$

709. $45x_1 - 28x_2 + 34x_3 - 52x_4 = 9,$
$36x_1 - 23x_2 + 29x_3 - 43x_4 = 3,$
$35x_1 - 21x_2 + 28x_3 - 45x_4 = 16,$
$47x_1 - 32x_2 + 36x_3 - 48x_4 = -17,$
$27x_1 - 19x_2 + 22x_3 - 35x_4 = 6.$

710. $12x_2 - 16x_3 + 25x_4 = 29,$
$27x_1 + 24x_2 - 32x_3 + 47x_4 = 55,$
$50x_1 + 51x_2 - 68x_3 + 95x_4 = 115,$
$31x_1 + 21x_2 - 28x_3 + 46x_4 = 50.$

711. $24x_1 + 14x_2 + 30x_3 + 40x_4 + 41x_5 = 28,$
$36x_1 + 21x_2 + 45x_3 + 61x_4 + 62x_5 = 43,$
$48x_1 + 28x_2 + 60x_3 + 82x_4 + 83x_5 = 58,$
$60x_1 + 35x_2 + 75x_3 + 99x_4 + 102x_5 = 69.$

Investigar el sistema y hallar la solución general en función del valor del parámetro λ:

712. $5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3,$
$4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1,$
$8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9,$
$7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda.$

713. $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3,$
$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5,$
$x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11,$
$4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2.$

714. $2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2,$
$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4,$
$4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4,$
$2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 7.$

715. $2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5,$
$4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7,$
$6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9,$
$\lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11.$

716. $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3,$
$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5,$
$6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7,$
$8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 = 9.$

717. $\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1,$
$x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1,$
$x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1.$

718. $$\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1,\\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 &= 1,\\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 &= 1,\\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 &= 1. \end{aligned}$$

719. $$\begin{aligned} (1+\lambda)\, x_1 + x_2 + x_3 &= 1,\\ x_1 + (1+\lambda)\, x_2 + x_3 &= \lambda,\\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)\, x_3 &= \lambda^2. \end{aligned}$$

720. $$\begin{aligned} (\lambda+1)\, x_1 + x_2 + x_3 &= \lambda^2 + 3\lambda,\\ x_1 + (\lambda+1)\, x_2 + x_3 &= \lambda^3 + 3\lambda^2,\\ x_1 + x_2 + (\lambda+1)\, x_3 &= \lambda^4 + 3\lambda^3. \end{aligned}$$

Investigar los sistemas de ecuaciones y hallar la solución general en función de los valores de los parámetros que figuran en los coeficientes:

721. $$\begin{aligned} x + y + z &= 1,\\ ax + by + cz &= d,\\ a^2x + b^2y + c^2z &= d^2. \end{aligned}$$

722. $$\begin{aligned} ax + y + z &= 1,\\ x + by + z &= 1,\\ x + y + cz &= 1. \end{aligned}$$

¿En qué caso pueden existir aquí valores nulos de algunas de las incógnitas?

723*. $$\begin{aligned} ax + y + z &= a,\\ x + by + z &= b,\\ x + y + cz &= c. \end{aligned}$$

Hallar la solución general y el sistema fundamental (o el principal) de soluciones para los sistemas de ecuaciones:

724. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 0,\\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 0,\\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0,\\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 &= 0. \end{aligned}$$

725. $$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0,\\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0,\\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 &= 0. \end{aligned}$$

726. $$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 &= 0,\\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 &= 0,\\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 &= 0,\\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 &= 0. \end{aligned}$$

727. $$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 0,\\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 &= 0,\\ x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0,\\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 &= 0. \end{aligned}$$

728. $$\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 &= 0,\\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 &= 0,\\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 &= 0,\\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 &= 0. \end{aligned}$$

729. $x_1 - x_3 = 0,$
$x_2 - x_4 = 0,$
$-x_1 + x_3 - x_5 = 0,$
$-x_2 + x_4 - x_6 = 0,$
$-x_3 + x_5 = 0,$
$-x_4 + x_6 = 0.$

730. $x_1 - x_3 + x_5 = 0,$
$x_2 - x_4 + x_6 = 0,$
$x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0,$
$x_2 - x_3 + x_6 = 0,$
$x_1 - x_4 + x_5 = 0.$

731. $5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0,$
$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0,$
$7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0,$
$5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0.$

732. $3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0,$
$5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0,$
$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0,$
$7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0.$

733. Demostrar que para cualquier sistema homogéneo de ecuaciones lineales de coeficientes racionales (por ejemplo, enteros) puede construirse un sistema fundamental de números enteros de soluciones (a condición de que el rango de la matriz de los coeficientes es inferior al número de las incógnitas).

734. Demostrar que para el sistema de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{1}$$

de rango $r < n$ cualesquiera $n - r$ soluciones linealmente independientes

$$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n},$$
$$\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n},$$
$$\alpha_{n-r,1}, \alpha_{n-r,2}, \ldots, \alpha_{n-r,n}$$

forman un sistema fundamental de soluciones y la solución general puede representarse en la siguiente forma

$$x_j = \sum_{k=1}^{n-r} c_k\alpha_{kj} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ son parámetros arbitrarios. En otras palabras, demostrar que para cualesquiera valores de los parámetros $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ las fórmulas (2) dan la solución del sistema (1) y cualquier solución del sistema (1) puede obtenerse de las fórmulas (2), siendo adecuados los valores de los parámetros $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$.

Para los siguientes sistemas de ecuaciones hallar la solución general tipo (2) del problema anterior, en el que cada incógnita se da mediante una expresión lineal homogénea de los parámetros con coeficientes enteros:

735. $2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0,$
$3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0,$
$4x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 0.$

736. $2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0,$
$4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0,$
$2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0.$

737. $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 0,$
$6x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0,$
$3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 11x_5 = 0,$
$6x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - 13x_5 = 0.$

738. $6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 9x_5 = 0,$
$3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 0,$
$6x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 20x_4 + 3x_5 = 0,$
$9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 15x_5 = 0.$

739. $2x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 8x_5 = 0,$
$4x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 0,$
$x_1 - 9x_2 - 3x_3 - 5x_4 - 14x_5 = 0,$
$3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0.$

740. $3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 9x_4 + 6x_5 = 0,$
$9x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 0,$
$3x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 30x_4 + 15x_5 = 0,$
$6x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0.$

741. ¿Forman las filas de cada una de las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & -50 & -5 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

un sistema fundamental de soluciones para el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 &= 0, \\ 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 7x_5 &= 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 11x_5 &= 0, \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 &= 0? \end{aligned}$$

742. ¿Cuáles filas de la matriz

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & 7 & -6 & -4 \\ 8 & 0 & -5 & 6 & 13 \\ 4 & -2 & -7 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

forman un sistema fundamental de soluciones para el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0, \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 &= 0, \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0? \end{aligned}$$

743*. Demostrar que si en la solución general de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales de rango r con n incógnitas, donde $r < n$,

en lugar de las incógnitas independientes se ponen por turno los números de cada fila de un determinante de orden $n - r$, diferente de cero, y hallar los correspondientes valores de las demás incógnitas, se obtiene un sistema fundamental de soluciones, y viceversa, cualquier sistema fundamental de soluciones de dicho sistema de ecuaciones puede obtenerse, eligiendo adecuadamente el determinante de orden $n - r$, distinto de cero.

744. Sean las filas de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \ldots & \alpha_{pn} \end{pmatrix}$$

que forman un sistema fundamental de soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales de rango r con n incógnitas ($n = r + p$). Demostrar que las filas de la matríz

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{p1} & \beta_{p2} & \ldots & \beta_{pn} \end{pmatrix}$$

forman también un sistema fundamental de soluciones del mismo sistema de ecuaciones cuando, y sólo cuando, existe una matriz regular de orden p

$$C = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \ldots & \gamma_{1p} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \ldots & \gamma_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{p1} & \gamma_{p2} & \ldots & \gamma_{pp} \end{pmatrix}$$

tal que

$$\beta_{ik} = \sum_{j=1}^{p} \gamma_{ij}\alpha_{jk} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ p,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Haciendo uso de la multiplicación matricial, estas igualdades pueden escribirse mediante una: $B = CA$.

745. Mostrar que el problema 743 es un caso particular del problema 744.

746. Demostrar que si el rango de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales es inferior en una unidad a la cantidad de incógnitas, cualesquiera dos soluciones de ese sistema son proporcionales, es decir, se diferencian sólo por un factor numérico (que puede ser igual a cero).

747. Usando la teoría de los sistemas homogéneos de ecuaciones lineales, resolver el problema 509, es decir, demostrar que si el determinante D de orden $n > 1$ es nulo, los cofactores de los elementos correspondientes de cualesquiera dos filas (columnas) son proporcionales.

748*. Demostrar que si en un sistema homogéneo de ecuaciones lineales el número de ecuaciones es inferior en una unidad a la can-

tidad de incógnitas, puede tomarse como solución un sistema de menores, obtenidos de la matriz de coeficientes, borrando por turno la primera columna, segunda, etc., con la particularidad de que esos menores se cogen con signos alternativos.

Prosiguiendo, mostrar que si esta solución no es nula, cualquier solución se obtiene de ella, multiplicándola por cierto número.

Haciendo uso del resultado anterior, hallar las soluciones general y particular de los sistemas de ecuaciones:

749. $5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0,$ $6x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0.$ **750.** $4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 0,$ $6x_1 - 9x_2 + 10x_3 = 0.$

751. $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0,$
$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 0,$
$3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0.$

752. $8x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0,$
$4x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0,$
$12x_1 - 7x_2 - 9x_3 + 5x_4 = 0.$

753. Demostrar que para que el sistema de ecuaciones lineales con el número de ecuaciones que supera en una unidad la cantidad de incógnitas sea compatible, es necesario (pero no es suficiente) que el determinante compuesto de todos los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes sea nulo. Mostrar que esta condición será también suficiente si el rango de la matriz, formada de los coeficientes, es igual al número de las incógnitas.

754. Supongamos que se dan: un sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

dos soluciones de este sistema $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ y $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ y un número λ. Hallar el sistema de ecuaciones lineales con los mismos coeficientes de las incógnitas, que el sistema dado, que tenga la solución en forma de

a) una suma de soluciones dadas:

$$\alpha_1 + \beta_1, \quad \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n,$$

ó

b) un producto de la primera de las soluciones por el número λ:

$$\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n.$$

755. Hallar las condiciones necesarias y suficientes para que bien la suma de dos soluciones, o bien el producto de una de ellas por el número $\lambda \neq 1$ sea de nuevo la solución del mismo sistema de ecuaciones lineales.

756. ¿Para qué condiciones la combinación lineal dada de cualesquiera soluciones del sistema no homogéneo dado de ecuaciones lineales será de nuevo la solución de ese sistema?

757. ¿Qué valores pueden tomar las incógnitas en cualesquiera soluciones de un sistema compatible de ecuaciones lineales si las columnas de los coeficientes de las incógnitas, a excepción de la primera, así como la columna de los términos independientes se diferencian de dos en dos sólo por los factores numéricos?

758. ¿Para qué condiciones la incógnita x_k tiene un mismo valor en cualquier solución de un sistema compatible de ecuaciones lineales?

759. Hallar las condiciones, necesarias y suficientes para que en cualquier solución de un sistema compatible de ecuaciones lineales la k-ésima incógnita sea nula.

760. ¿Para que condiciones en la solución general del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y + az + bt &= 0,\\ -x + cz + dt &= 0,\\ ax + cy - et &= 0,\\ bx + dy + ez &= 0 \end{aligned}$$

z y t pueden tomarse por incógnitas independientes?

761. ¿Cuántas condiciones, independientes entre sí, deben cumplirse para que el sistema de s ecuaciones lineales con n incógnitas sea compatible y contenga r ecuaciones independientes para las cuales las demás ecuaciones sean su resultado?

762. ¿Para qué condiciones el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= by + cz + du + ev,\\ y &= cz + du + ev + ax,\\ z &= du + ev + ax + by,\\ u &= ev + ax + by + cz,\\ v &= ax + by + cz + du \end{aligned}$$

tiene solución no nula?

763*. ¿Para qué condiciones el sistema de ecuaciones lineales con coeficientes reales

$$\begin{aligned} \lambda x + ay + bz + ct &= 0,\\ -ax + \lambda y + hz - gt &= 0,\\ -bx - hy + \lambda z + ft &= 0,\\ -cx + gy - fz + \lambda t &= 0 \end{aligned}$$

tiene solución no nula?

Aplicando la teoría de las ecuaciones lineales, resolver los siguientes problemas (se examinan sólo los sistemas cartesianos rectangulares de coordenadas):

764. Hallar las condiciones necesarias y suficientes para que los tres puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) se encuentren en una misma recta.

765. Escribir la ecuación de una recta que pase a través de dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

766. Hallar las condiciones necesarias y suficientes para que las tres rectas

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$
$$a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

atraviesen un mismo punto.

767. Hallar las condiciones necesarias y suficientes para que n puntos del plano (x_1, y_1), (x_2, y_2), . . ., (x_n, y_n) se encuentren en una recta.

768. Hallar las condiciones necesarias y suficientes para que n rectas en el plano

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_nx + b_ny + c_n = 0$$

pasen a través de un mismo punto.

769. Hallar las condiciones necesarias y suficientes para que los cuatro planos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) que no yacen en una misma recta, se encuentren en una misma circunferencia.

770. Escribir la ecuación de una circunferencia que pasa por tres puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) que no yacen en una misma recta.

771. Escribir la ecuación de una circunferencia que pasa por tres puntos $(1, 2)$, $(1, -2)$, $(0, -1)$ y hallar su centro y radio.

772*. Demostrar que la circunferencia que pasa por tres puntos con coordenadas racionales, tiene su centro en un punto también con coordenadas racionales.

773. Escribir la ecuación de una curva de segundo orden que atraviesa cinco puntos:

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (x_3, y_3),\ (x_4, y_4),\ (x_5, y_5).$$

774. Hallar la ecuación y definir la forma de la curva de segundo orden que pasa por cinco puntos:

$$(3, 0),\ (-3, 0),\ \left(5,\ 6\frac{2}{3}\right),\ \left(5,\ -6\frac{2}{3}\right),\ \left(-5,\ -6\frac{2}{3}\right).$$

775. Escribir la ecuación y definir la posición y las dimensiones de la curva de segundo orden que atraviesa cinco puntos:

$$(0, 1),\ (\pm 2, 0),\ (\pm 1, -1).$$

776. Hallar la condición necesaria y suficiente para que los cuatro puntos (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) y (x_4, y_4, z_4) estén en un mismo plano.

777. Escribir la ecuación de un plano que atraviesa tres puntos

$$(1,\ 1,\ 1),\ (2,\ 3,\ -1),\ (3,\ -1,\ -1).$$

778. Hallar las condiciones necesarias y suficientes para que los cuatro planos

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0,$$
$$a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0$$

pasen por un mismo punto.

779. Hallar las condiciones necesarias y suficientes para que n planos $a_ix + b_iy + c_iz + d_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ pasen por una misma línea, sin unirse en un plano.

780. Escribir la ecuación de una esfera que pasa por cuatro puntos (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4) que no están en un mismo plano.

781. Escribir la ecuación y hallar el centro y el radio de la esfera que pasa por los puntos: $(1, 1, 1)$, $(1, 1, -1)$, $(1, -1, 1)$, $(-1, 0, 0)$.

782. ¿Qué sistema de ecuaciones lineales prefija tres diversas rectas en un plano que pasan a través de un punto?

783. ¿Qué sistema de ecuaciones lineales prefija tres rectas en el plano que forman un triángulo?

784. ¿Qué sistema de ecuaciones lineales prefija tres planos del espacio que no poseen puntos comunes pero se intersecan de dos en dos?

785. ¿Qué sistema de ecuaciones lineales prefija cuatro planos en el espacio que forman un tetraedro?

786. Señalar la interpretación geométrica de un sistema de cuatro ecuaciones lineales con tres incógnitas en el cual los rangos de todas las matrices, formadas de los coeficientes de las incógnitas de las tres ecuaciones y el rango de la matriz ampliada son iguales a tres?

787. Examinar todos los casos posibles que se encuentran al resolver los sistemas de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas, y en cada caso dar la interpretación geométrica de dicho sistema de ecuaciones.

MATRICES Y FORMAS CUADRÁTICAS

§ 12. Operaciones con las matrices

Calcular los productos de las matrices:

788. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.   **789.** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

790. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.   **791.** $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

792. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

793. $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & -4 & -5 \\ 6 & 4 & -3 & -2 \\ 8 & 5 & -6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

794. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

795. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{pmatrix}$.

796. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

797. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 & -18 & 10 \\ -46 & 31 & -17 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

798. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & -4 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & -3 \\ -16 & -11 & -15 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 4 \\ 11 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 22 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}$.

Calcular las expresiones:

799. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$.   **800.** $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5$.

801. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$.   **802.** $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$.

803. $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}^k$

donde los ceros significan que todos los elementos de la matriz que se encuentran fuera de la diagonal principal son nulos.

804. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$. 805. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$.

806. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}^3$ 807. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^{n-1}$,

(el orden de dicha matriz es igual a n).

808. Calcular $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^5$, utilizando la igualdad

$$\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

809. Calcular $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}^6$, utilizando la igualdad

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

810. Demostrar que si para las matrices A y B ambos productos AB y BA existen con la particularidad de que $AB = BA$, las matrices A y B son cuadradas y tienen el mismo orden.

811. ¿Cómo cambia el producto AB de las matrices A y B si:

a) se permutan las i-ésima y j-ésima filas de la matriz A?

b) a la i-ésima fila de la matriz A se le añade la j-ésima fila multiplicada por el número c?

c) se permutan las i-ésima y j-ésima columnas de la matriz B?

d) a la i-ésima columna de la matriz B se le añade la j-ésima columna multiplicada por el número c?

812. Haciendo uso del problema anterior y de la constancia del rango durante las transformaciones elementales (véase el problema 615), demostrar que el rango del producto de dos matrices no supera el rango de cada uno de los factores.

813. Demostrar que el rango del producto de varias matrices no supera el rango de cada una de las matrices que se multiplican.

814. Se denomina «huella» de una matriz cuadrada la suma de elementos que están en la diagonal principal. Demostrar que la huella de AB es igual a la de BA.

815. Demostrar que si A y B son matrices cuadradas de un mismo orden con la particularidad de que $AB \neq BA$, entonces:

a) $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$;
b) $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$.

816. Demostrar que si $AB = BA$, entonces

$$(A+B)^n = A^n + nA^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2}A^{n-2}B^2 + \ldots + B^n.$$

Aquí A y B son matrices cuadradas del mismo orden.

817. Demostrar que cualquier matriz cuadrada A puede representarse, sólo de un modo único, en forma de $A = B + C$, donde B es una matriz simétrica y C, antisimétrica.

818. Las matrices A y B se denominan *conmutativas* si $AB = BA$. La matriz cuadrada A se llama *escalar* si todos sus elementos que se encuentran fuera de la diagonal principal, son nulos, y los elementos de la diagonal principal son iguales entre sí, o sea, si $A = cE$, donde c es un número y E es la matriz unidad. Demostrar la afirmación: para que la matriz cuadrada A sea conmutativa con todas las matrices cuadradas del mismo orden, es necesario y suficiente que la matriz A sea escalar.

819. La matriz cuadrada se denomina diagonal si todos sus elementos que están fuera de la diagonal principal son nulos. Demostrar la afirmación: para que la matriz cuadrada A sea conmutativa con todas las matrices diagonales es necesario y suficiente que la propia matriz A sea diagonal.

820. Demostrar que si A es una matriz diagonal y todos los elementos de su diagonal principal se diferencian entre sí, cualquier matriz, conmutativa con A, también es diagonal.

821. Demostrar que al multiplicar la matriz A a la izquierda por una matriz diagonal $B = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, se origina la multiplicación de las filas de A por $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, respectivamente, y al multiplicar a la derecha A por B, se origina una variación análoga de las columnas.

Hallar todas las matrices, conmutativas con la matriz:

822. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. **823.** $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$. **824.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

825. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

826. Hallar todos los números c que, al multiplicar la matriz regular A por los mismos, no cambian su determinante.

827. Hallar el valor del polinomio $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

828. Hallar el valor del polinomio $f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5$ de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

829. Demostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ satisface la ecuación

$$x^2 - (a + d)x + ad - bc = 0.$$

830*. Demostrar que para cualquier matriz cuadrada A existe un polinomio $f(x)$, distinto de cero y tal que $f(A) = 0$, con la particularidad de que todo polinomio de este tipo se divide por uno de ellos que se determina unívocamente por la condición de que su coeficiente mayor es igual a la unidad (éste se denomina polinomio mínimo de la matriz A).

831*. Demostrar que la igualdad $AB - BA = E$ no se cumple para ninguna de las semejantes matrices A y B.

832. Hallar todas las matrices de segundo orden, cuyo cuadrado es igual a la matriz nula.

833*. Sean A una matriz de segundo orden y k un número entero superior a dos. Demostrar que $A^k = 0$ si, y sólo si, $A^2 = 0$.

834. Hallar todas las matrices de segundo orden, cuyos cuadrados son iguales a la matriz unidad.

835. Investigar la ecuación $AX = 0$, donde A es la matriz dada de segundo orden y X es la buscada del mismo orden.

Hallar las matrices inversas para las siguientes matrices:

836. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. 837. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. 838. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

839. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. 840. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

841. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$. 842. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. 843. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

844. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 845. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

846. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. 847. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

848. $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

849. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \end{pmatrix}$

(el orden de la matriz es $n+1$).

850. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

851. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$.

852. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

853. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

854. $\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a \end{pmatrix}$

(el orden de la matriz es igual a n).

855. $\begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{pmatrix}$.

856. Mostrar que el cálculo de la matriz inversa de la dada de orden n puede reducirse a la solución de n sistemas de ecuaciones lineales, cada uno de los cuales contiene n ecuaciones con n incógnitas y en calidad de la matriz de los coeficientes de las incógnitas tiene la matriz A.

Utilizando el método del problema 856, hallar las matrices inversas para las siguientes matrices:

857. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

858*. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$.

859. $\begin{pmatrix} a & a+h & a+2h & \dots & a+(n-2)h & a+(n-1)h \\ a+(n-1)h & a & a+h & \dots & a+(n-3)h & a+(n-2)h \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a+h & a+2h & a+3h & \dots & a+(n-1)h & a \end{pmatrix}$.

860*. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6 & \dots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^9 & \dots & \varepsilon^{3(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \varepsilon^{3(n-1)} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$,

donde $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$.

Resolver las ecuaciones matriciales:

861. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$. **862.** $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

863. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

864. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

865. $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

866. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$.

867. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$. **868.** $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$.

869. $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. **870.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

871. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

872. ¿Cómo varía la matriz inversa A^{-1} si en la matriz A dada:
a) se permutan la i-ésima y j-ésima filas?
b) la i-ésima fila se multiplica por el número c, distinto de cero?
c) a la i-ésima fila se le añade la j-ésima, multiplicada por el número c o se efectúa una transformación análoga de las columnas?

873. Una matriz cuadrada de números enteros se denomina *unimodular* si su determinante es igual a ± 1. Demostrar que la matriz de números enteros tiene una matriz inversa de números enteros cuando, y sólo cuando, la matriz dada es unimodular.

874. Demostrar que la ecuación matricial $AX = B$ es resoluble si, y sólo si, el rango de la matriz A es igual al de la matriz (A, B) que se obtiene de A, añadiendole a la derecha la matriz B.

875. Mostrar que la ecuación matricial $AX = 0$, donde A es una matriz cuadrada, tiene la solución no nula cuando, y sólo cuando, $|A| = 0$.

876. Sean A y B matrices regulares de un mismo orden. Mostrar que las cuatro igualdades:

$$AB = BA, \quad AB^{-1} = B^{-1}A, \quad A^{-1}B = BA^{-1},$$
$$A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

son equivalentes entre sí.

877. Sean A una matriz cuadrada y $f(x)$ y $g(x)$ cualesquiera polinomios. Mostrar que las matrices $f(A)$ y $g(A)$ son conmutativas, o sea, $f(A)\,g(A) = g(A)\,f(A)$.

878. Sean A una matriz cuadrada y $r(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ una función racional con respecto a x. Mostrar que el valor $r(A)$ de la función $r(x)$ para $x = A$ se determina unívocamente si, y sólo si, $|g(A)| \neq \neq 0$.

879. Hallar la matriz A^{-1}, inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} E_k & U \\ 0 & E_l \end{pmatrix}$, donde E_k y E_l son matrices unidades de órdenes k y l, respectivamente, U es una matriz (k, l) arbitraria (o sea, una matriz de k filas y l columnas), mientras que todos los demás elementos son nulos.

880. Se denomina k-ésima *serie antisimétrica de orden* n la matriz cuadrada $H_k = (h_{ij})$ de orden n, cuyos elementos se determinan mediante las igualdades

$$h_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ para } j - i = k, \; (k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(n-1)). \\ 0 \text{ para } j - i \neq k \end{cases}$$

Mostrar que $H_1^k = H_k, H_{-1}^k = H_{-k}$, si $k = 1, 2, \ldots, n-1$; $H_1^k = H_{-1}^k = = 0$, si $k \geqslant n$.

881. ¿Cómo varía la matriz A al multiplicarla a la izquierda o a la derecha por la matriz H_1 o H_{-1} del problema anterior?

882. Mostrar que la operación de transponer una matriz posee las propiedades:

$$\text{a) } (A + B)' = A' + B'; \quad \text{b) } (AB)' = B'A';$$
$$\text{c) } (cA)' = cA'; \quad \text{d) } (A^{-1})' = (A')^{-1},$$

donde c es un número y A y B son matrices.

883. Demostrar que si A y B son matrices cuadradas simétricas del mismo orden, la matriz $C = ABAB \ldots ABA$ es simétrica.

884. Mostrar que:

a) una matriz inversa de una simétrica regular es simétrica;

b) una matriz inversa de una antisimétrica regular es antisimétrica.

885. Mostrar que para cualquier matriz B la matriz $A = BB'$ es simétrica.

886. Sea $A^* = \overline{A}'$ la matriz obtenida de A, transponiéndola y sustituyendo todos los elementos por números complejos conjugados.

Mostrar que:

a) $(A+B)^* = A^* + B^*$; b) $(AB)^* = B^*A^*$;

c) $(cA)^* = \bar{c}A^*$; d) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$,

donde c es un número y A y B son matrices, sobre las cuales se efectúa la correspondiente operación.

887. La matriz A se denomina *hermitiana* si $A^* = A$. Mostrar que para cualquier matriz B con elementos reales o complejos la matriz $A = B \cdot B^*$ es hermitiana.

888. Mostrar que el producto de dos matrices simétricas será una matriz simétrica cuando, y sólo cuando, dichas matrices son conmutativas.

889. Mostrar que el producto de dos matrices antisimétricas será una matriz simétrica si, y sólo si, las matrices dadas son conmutativas.

890*. Demostrar que el producto de dos matrices antisimétricas A y B será una matriz antisimétrica cuando, y sólo cuando, $AB = -BA$.

Citar algunos ejemplos de matrices antisimétricas que satisfacen la condición $AB = -BA$.

891. La matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de orden n se denomina *ortogonal* si $AA' = E$, donde E es una matriz unidad. Mostrar que para que la matriz cuadrada A sea ortogonal es necesario y suficiente cualquiera de las siguientes condiciones:

a) las columnas de A forman un sistema ortonormalizado, es decir,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij},$$

donde δ_{ij} es el símbolo de Kronecker que significa 1 para $i = j$ y 0 para $i \neq j$;

b) las filas de A forman un sistema ortonormalizado, o sea,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}.$$

892. La matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de orden n con elementos complejos o reales se denomina *unitaria* si $AA^* = E$ (el sentido de la designación de A^* es el mismo que en el problema 886). Mostrar que para que la matriz cuadrada A sea unitaria es necesario y suficiente cualquiera de las siguientes condiciones:

a) $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\bar{a}_{kj} = \delta_{ij}$,

b) $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\bar{a}_{jk} = \delta_{ij}$

(δ_{ij} es el símbolo de Kronecker).

893. Demostrar que el determinante de una matriz ortogonal es igual a ± 1.

894. Demostrar que el determinante de una matriz unitaria es igual, según el módulo, a la unidad.

895. Demostrar que si la matriz ortogonal A tiene en la diagonal principal células cuadradas $A_1, A_2, \ldots, A_s$ y ceros por un lado de esas célula, entonces todos los elementos por otro lado de ellas también son nulos y todas las matrices $A_1, A_2, \ldots, A_s$ son ortogonales.

896. Demostrar que para que la matriz cuadrada A sea ortogonal es necesario y suficiente que su determinante sea igual a ± 1 y cada uno de sus elementos sea igual a su cofactor, tomado con su signo si $|A| = 1$ y con el signo opuesto, si $|A| = -1$.

897*. Demostrar que la matriz cuadrada real A de orden $n \geqslant 3$ será ortogonal si cada uno de sus elementos es igual a su cofactor y por lo menos uno de sus elementos es distinto de cero.

898*. Demostrar que la matriz cuadrada real A de orden $n \geqslant 3$ será ortogonal si cada uno de sus elementos es igual a su cofactor tomado con signo opuesto, y por lo menos uno de sus elementos se diferencia de cero.

899*. Demostrar que la suma de los cuadrados de todos los menores de segundo orden que yacen en dos filas (o columnas) de una matriz ortogonal, es igual a la unidad.

900*. Demostrar que la suma de los cuadrados de los módulos de todos los menores de segundo orden que yacen en dos filas (o columnas) de una matriz unitaria, es igual a la unidad.

901*. Demostrar que la suma de los cuadrados de todos los menores de orden k que yacen en cualesquiera k filas (columnas) de una matriz ortogonal, es igual a la unidad.

902*. Demostrar que la suma de los cuadrados de los módulos de todos los menores de orden k que yacen en cualesquiera k filas (columnas) de una matriz unitaria, es igual a la unidad.

903*. Demostrar que un menor de cualquier orden de una matriz ortogonal A es igual a su cofactor tomado con su signo si $|A| = 1$ y con signo opuesto si $|A| = -1$.

904*. Sean A una matriz unitaria, M su menor de cualquier orden, M_A el cofactor del menor M en la matriz A. Demostrar que $M_A = |A| \cdot \overline{M}$, donde $\overline{M}$ es un número conjugado con M.

905. ¿En qué condiciones la matriz diagonal será ortogonal?

906. ¿En qué condiciones la matriz diagonal será unitaria?

907. Comprobar que cualquiera de las tres propiedades de la matriz cuadrada: la de ser real, ortogonal y unitaria, se desprenden de las otras dos.

908. Una matriz cuadrada I se denomina involutiva si $I^2 = E$. Mostrar que cada una de las tres propiedades de la matriz cuadrada: la de ser simétrica, ortogonal e involutiva, se desprende de las otras dos.

909. Comprobar que las matrices

a) $\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

poseen todas las tres propiedades del problema anterior.

910. La matriz cuadrada P se denomina *idempotente* si $P^2 = P$. Mostrar que si P es idempotente, $I = 2P - E$ es involutiva, y viceversa, si I es involutiva, $P = {}^1/_2\,(I + E)$ es idempotente.

911. Demostrar que:

a) el producto de dos matrices ortogonales será una matriz ortogonal;

b) la matriz inversa de la matriz ortogonal es ortogonal.

912. Demostrar que:

a) el producto de dos matrices unitarias será una matriz unitaria;

b) una matriz, inversa de la matriz unitaria, es unitaria.

913*. Al menor de la matriz A el cual se encuentra en la intersección de las filas con números $i_1, i_2, \ldots, i_p$ y las columnas con números $j_1, j_2, \ldots, j_p$ lo designaremos por $A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_p \\ j_1, j_2, \ldots, j_p \end{pmatrix}$.

Demostrar la validez de la siguiente expresión de los menores del producto $C = AB$ de dos matrices mediante los menores de las matrices que se multiplican:

$$C\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \ldots, & i_p \\ j_1, & j_2, & \ldots, & j_p \end{pmatrix} = \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_p \leqslant n} A\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \ldots, & i_p \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_p \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1, & k_2, & \ldots, & k_p \\ j_1, & j_2, & \ldots, & j_p \end{pmatrix}$$

$$(i_1 < i_2 < \ldots < i_p;\ j_1 < j_2 < \ldots < j_p),$$

si p no supera ni la cantidad de columnas de la matriz A, ni la cantidad de filas de la matriz B. En caso contrario, todos los menores de orden p de la matriz C son nulos.

914. Utilizando el problema anterior demostrar que el rango del producto de dos matrices no supera el rango de cada uno de los factores.

915*. Demostrar que al multiplicar la matriz A a la izquierda o a la derecha por una matriz regular, su rango no varía.

916. El menor que está en la intersección de las filas y columnas con los mismos números se denomina menor principal de la matriz A. Mostrar que si todos los elementos de la matriz B son reales, todos los menores principales de $A = BB'$ son no negativos.

917. Mostrar que para cualquier matriz B con elementos reales o complejos todos los menores principales de la matriz $A = BB^*$ son no negativos. Aquí $B^* = \overline{B}'$.

918. Mostrar que si en las designaciones del problema anterior $A = BB^*$, el rango de A es igual al rango de B.

919. Demostrar que la suma de los menores principales de orden k de la matriz AA' es igual a la suma de los cuadrados de todos los menores de orden k de la matriz A.

920*. Demostrar que para cualesquiera matrices cuadradas A y B de orden n la suma de todos los menores principales de dicho orden k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ es igual para las matrices AB y BA.

921*. Sean A una matriz real de orden n, B y C las matrices de las primeras k columnas y las últimas $n - k$ de A. Demostrar que $|A^2| \leqslant |B'B| \cdot |C'C|$.

922*. Sea $A = (B, C)$ una matriz real (el sentido del símbolo (B, C) se da en el problema 874). Demostrar que $|A'A| \leqslant |B'B| \times \times |C'C|$.

923*. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada real de orden n. Demostrar la desigualdad de Hadamard:

$$|A|^2 \leqslant \prod_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^2.$$

924*. Demostrar que para cualquier matriz rectangular real $A = (a_{ij})$ de n filas y m columnas se cumple la desigualdad

$$|A'A| \leqslant \prod_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^2.$$

925*. Sea $A = (B, C)$ una matriz de elementos complejos. Demostrar que $|A^* \cdot A| \leqslant |B^* \cdot B| \cdot |C^* \cdot C|$.

926* Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n de elementos complejos que no superan, según el módulo, el número M. Demostrar que el módulo del determinante $|A|$ no supera $M^n \cdot n^{n/2}$, con la particularidad de que esta estimación es precisa.

927*. Mostrar que cada una de las transformaciones elementales de la matriz A, es decir, la transformación de uno de los siguientes tipos:

a) permutación de dos filas (columnas);

b) multiplicación de una fila (columna) por un número c diferente de cero;

c) adición de una fila (columna) multiplicada por cualquier número c, a otra fila (columna); puede obtenerse multiplicando la matriz A a la izquierda por cierta matriz singular P con el fin de transformar las filas, y a la derecha para transformar las columnas. Hallar el aspecto de esas matrices.

928*. Una matriz cuadrada se denomina *triangular* si todos sus elementos que están por un lado de la diagonal principal, son nulos. Mostrar que cualquier matriz cuadrada puede representarse en forma de un producto de varias matrices triangulares.

929* Mostrar que cualquier matriz A de rango r puede representarse en forma de un producto $A = PRQ$, donde P y Q son matrices regulares y R es una matriz rectangular de las mismas dimensiones que A, en cuya diagonal principal los primeros r elementos son igua-

les a la unidad, mientras que todos los demás elementos son nulos.

930*. Sean A una matriz de dimensiones $m \times n$ y de rango r, $P = (p_{ij})$ una matriz de dimensiones $s \times m$, en la cual $p_{11} = p_{22} = \ldots = p_{kk} = 1$, y todos los demás elementos son ceros, $Q = (q_{ij})$ una matriz de dimensiones $n \times t$, en la cual $q_{11} = q_{22} = \ldots = q_{ll} = 1$ y todos los demás elementos son ceros. Demostrar las desigualdades:

a) el rango de $PA \geqslant k + r - m$;

b) el rango de $AQ \geqslant l + r - n$;

c) el rango de $PAQ \geqslant k + l + r - m - n$.

931* Designemos el rango de la matriz A por r_A. Demostrar que para el rango del producto AB de dos matrices cuadradas A y B de orden n tiene lugar la siguiente desigualdad:

$$r_A + r_B - n \leqslant r_{AB} \leqslant r_A,\ r_B \text{ (desigualdad de Sylvester).}$$

932. Mostrar que para el rango del producto AB de las matrices rectangulares A y B tiene lugar la desigualdad de Sylvester del problema anterior a condición de que n significa el número de columnas de la matriz A y el número de filas de la matriz B.

933*. Mostrar que cualquier matriz regular A puede reducirse a una matriz unidad E mediante las transformaciones elementales sólo de las filas (o sólo de las columnas). Si las transformaciones elementales que se ejecutaron sobre A, se aplican en el mismo orden a la matriz unitaria E, obtendremos como resultado una matriz A^{-1}, inversa de A.

Utilizando el método del problema anterior, hallar las matrices inversas para las siguientes matrices (para comodidad de los cálculos, añadir a dicha matriz A a la derecha una matriz unidad y efectuar las transformaciones elementales de las filas que reducen A a E, sobre las filas de toda la matriz escrita):

934. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -6 \end{pmatrix}$. **935.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. **936.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

937. Haciendo uso del método del problema 933, hallar las matrices inversas para las matrices de los problemas 844, 846, 848, 849, 850.

938*. Demostrar la afirmación:

Para que la matriz A de m filas y n columnas tenga el rango igual a la unidad, es necesario y suficiente que A se represente en forma de $A = BC$, donde B es una columna no nula de longitud m, C la fila no nula de longitud n.

939* Demostrar la afirmación:

Para que la matriz A de m filas y n columnas tenga el rango r, es necesario y suficiente que A se represente de la siguiente forma: $A = BC$, donde B es la matriz de m filas y r columnas linealmente

independientes y C, una matriz de r filas linealmente independientes y n columnas.

940. Mostrar que si A y B son matrices cuadradas de orden n y $AB = 0$, entonces $r_A + r_B \leqslant n$, con la particularidad de que para cualquier matriz dada A puede elegirse la matriz B de modo que sea $r_A + r_B = k$, donde k es cualquier número entero que satisface la condición $r_A \leqslant k \leqslant n$.

941*. Mostrar que si A es una matriz cuadrada de orden n, para la cual $A^2 = E$, entonces $r_{E-A} + r_{E-A} = n$.

942. Dos matrices de números enteros se denominan equivalentes si de una de ellas se puede pasar a la otra mediante unas transformaciones elementales de números enteros, es decir, mediante transformaciones de los siguientes tipos:

a) permutación de dos filas;

b) multiplicación de una fila por -1;

c) adición de una fila multiplicada por un número entero c a otra, y transformaciones análogas para las columnas. Demostrar que las matrices A y B son equivalentes cuando, y sólo cuando, $B = PAQ$, donde P y Q son matrices unimodulares cuadradas de números enteros.

943*. Una matriz rectangular de números enteros A se denomina *normal* si sus elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr}$ son positivos, a_{ii} se divide por $a_{i-1, i-1}$ $(i = 1, 3, \ldots, r)$ y los elementos restantes son nulos. Mostrar que cada matriz de números enteros es equivalente a una, y sólo a una, matriz normal; en otras palabras, cada clase de matrices de números enteros, equivalentes entre sí, tiene una matriz normal y, además, sólo una.

944*. Demostrar que cada matriz regular de números enteros A puede representarse en forma de $A = PR$, donde P es una matriz unimodular de números enteros y R, una matriz triangular de números enteros, cuyos elementos en la diagonal principal son positivos, más abajo de ésta son nulos y más arriba de ella son no negativos y menores que los elementos de la diagonal principal de la misma columna, con la particularidad de que dicha representación es única.

945*. Demostrar que la matriz cuadrada A de orden n y rango r puede representarse en forma de $A = PR$, donde P es una matriz regular y R, una matriz triangular, en la cual los primeros r elementos de la diagonal principal son iguales a la unidad y todos los elementos que se hallan más abajo de la diagonal principal y todos los elementos de las últimas $n - r$ filas son nulos.

946*. Una matriz cuadrada se denomina *superior* (*inferior*) triangular si todos sus elementos que se encuentran más abajo (respectivamente, más arriba) de la diagonal principal, son nulos. Mostrar que las siguientes operaciones: adición de dos matrices, multiplicación de una matriz por un número, multiplicación de dos matrices y paso a la matriz inversa para una matriz regular, aplicadas a las matrices superiores (inferiores) triangulares conducen de nuevo a una matriz superior (inferior) triangular.

947. Una matriz cuadrada se denomina *nilpotente* si algún grado de ella es igual a cero. El mínimo número positivo entero k, para el cual $A^k = 0$, se denomina *índice del carácter nilpotente de la matriz* A. Mostrar que la matriz triangular es nilpotente si, y sólo si, todos los elementos de la diagonal principal son nulos, y el índice del carácter nilpotente de la matriz triangular no supera su orden.

948. Mostrar que la matriz inversa $B = (b_{ik})$ para una matriz regular triangular superior (inferior) $A = (a_{ik})$ de orden n será de nuevo una matriz triangular superior (inferior), con la particularidad de que los elementos de la diagonal principal de la matriz B se determinan mediante las igualdades: $b_{ii} = \frac{1}{a_{ii}}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ y los demás elementos se encuentran de las relaciones recurrentes:

a) para los elementos de la i-ésima fila de la matriz triangular superior

$$b_{ik} = \frac{-\sum_{j=i}^{k-1} b_{ij} a_{jk}}{a_{kk}} \quad (k = i+1, i+2, \ldots, n);$$

b) para los elementos de la k-ésima columna de la matriz triangular inferior

$$b_{ik} = \frac{-\sum_{j=k}^{i-1} a_{ij} b_{jk}}{a_{ii}} \quad (i = k+1, k+2, \ldots, n).$$

Es cómodo utilizar estas fórmulas para calcular las matrices inversas de las triangulares.

949*. Sea A una matriz cuadrada de orden n y rango r con la particularidad de que

$$d_k = A\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & k \\ 1, & 2, & \ldots, & k \end{pmatrix} \neq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, r). \tag{1}$$

Demostrar que para estas condiciones la matriz A puede representarse en forma de un producto

$$A = BC, \tag{2}$$

donde $B = (b_{ij})$ es una matriz triangular inferior y $C = (c_{ij})$, una matriz triangular superior (la definición de las matrices triangulares inferior y superior se ha dado en el problema 946).

A los primeros r elementos diagonales de las matrices B y C se les puede dar cualesquiera valores que satisfacen las condiciones

$$b_{kk} c_{kk} = \frac{d_k}{d_{k-1}} \quad (k = 1, 2, \ldots, r;\ d_0 = 1). \tag{3}$$

Dados los primeros r elementos diagonales de las matrices B y C se determinan unívocamente los demás elementos de las primeras r columnas de la matriz B y las primeras r filas de la matriz C, con

la particularidad de que esos elementos se dan por las fórmulas

$$b_{ik}=b_{kk}\frac{A\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & k-1, & i\\ 1, & 2, & \ldots, & k-1, & k\end{pmatrix}}{d_k},$$
$$c_{ki}=c_{kk}\frac{A\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & k-1, & k\\ 1, & 2, & \ldots, & k-1, & i\end{pmatrix}}{d_k} \qquad (4)$$
$$(i=k+1,\ k+2,\ \ldots,\ n;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ r).$$

En caso de $r<n$ en las últimas $n-r$ columnas de la matriz B todos los elementos pueden tomarse iguales a cero y en las últimas $n-r$ filas de la matriz C los elementos pueden tomarse arbitrarios, o, viceversa, en las últimas $n-r$ columnas de la matriz B, considerarse arbitrarios y en las últimas $n-r$ filas de la matriz C todos los elementos pueden tomarse iguales a cero.

Los elementos arbitrarios no infringen la igualdad (2). Se les puede elegir de modo que se conserve el aspecto triangular de las matrices B y C.

950. Mostrar que la representación (2) del problema anterior puede hallarse del siguiente modo: los primeros r elementos en la diagonal principal de las matrices B y C se eligen de modo arbitrario pero deben satisfacer las condiciones (3) y los demás elementos de las primeras r columnas de B y las primeras r filas de C se calculan con ayuda de las relaciones recurrentes:

$$b_{ik}=\frac{a_{ik}-\sum_{j=1}^{k-1}b_{ij}c_{jk}}{c_{kk}}\qquad (i=k+1,\ k+2,\ \ldots\ n;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ r);$$
$$c_{ik}=\frac{a_{ik}-\sum_{j=1}^{i-1}b_{ij}c_{jk}}{b_{ii}}\qquad (k=i+1,\ i+2,\ \ldots,\ n;\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ r).$$

Estas fórmulas permiten hallar al principio la primera columna de B y la primera fila de C, luego, en general, sabiendo las $k-1$ columnas de B y las $k-1$ filas de C, hallar la k-ésima columna de B y la k-ésima fila de C.

951*. Demostrar que cualquier matriz simétrica $A=(a_{ij})$ de orden n y rango r que satisface las condiciones (1) del problema 949, puede representarse en forma de $A=BB'$, donde B es la matriz triangular inferior, cuyos elementos de las últimas $n-r$ columnas son nulos, y los elementos de las primeras r columnas se determinan mediante las fórmulas

$$b_{ik}=\frac{A\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & k-1, & i\\ 1, & 2, & \ldots, & k-1, & k\end{pmatrix}}{\sqrt{d_k\cdot d_{k-1}}}\qquad (i=k,\ k+1,\ \ldots,\ n;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ r).$$

952. La matriz A se denomina *celular* (o *en bloques*) si sus elementos están distribuidos mediante una o varias líneas horizontales

y verticales por las células (bloques) rectangulares. Estas células las designaremos por A_{ij}, donde i es el número de la fila celular y j, el número de la columna celular. Mostrar que la multiplicación de dos matrices celulares se reduce a la multiplicación de las células, consideradas como elementos aislados, cuando, y sólo cuando, la división vertical de la primera matriz corresponde a la división horizontal de la segunda. A saber: si $A = (A_{ij})$ es una (m, n)-matriz con división de las filas en grupos según $m_1, m_2, \ldots, m_s$ y de las columnas según $n_1, n_2, \ldots, n_t$ y $B = (B_{ij})$ es una (n, p)-matriz con división de las filas en grupos según $n_1, n_2, \ldots, n_t$ y de las columnas en grupos según $p_1, p_2, \ldots, p_u$, entonces $AB = C = (C_{ij})$ será también una matriz celular, con la particularidad de que

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^{t} A_{ij}B_{jk} \quad (i = 1, 2, \ldots, s; \; k = 1, 2, \ldots, u).$$

Haciendo uso de la regla señalada de la multiplicación de las matrices celulares, hallar las células del producto de las siguientes matrices para la subdivisión indicada en células para los factores:

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ \hline 4 & -2 & 1 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

953. Mostrar que para multiplicar dos matrices cuadradas celulares es suficiente (pero, como muestra el ejemplo del problema anterior, no es necesario) que las células diagonales sean cuadradas, con la particularidad de que los órdenes de las correspondientes células diagonales sean iguales entre sí.

954*. Mostrar que para realizar la multiplicación celular de una matriz celular por sí misma es necesario y suficiente que todas sus células diagonales sean cuadradas.

955. Una matriz celular cuadrada $A = (A_{ij})$ se denomina *triangular-celular* si todas sus células en la diagonal principal, o sea, $A_{11}, A_{22}, \ldots$, son cuadradas y todas las células que se encuentran por un lado de la diagonal principal son nulas. Mostrar que si A y B son dos matrices triangulares-celulares con los mismos órdenes de las correspondientes células diagonales y los ceros por un lado de la diagonal, su producto AB también será una matriz triangular-celular con los mismos órdenes de las células diagonales y los ceros por el mismo lado de la diagonal.

956. Mostrar que una matriz triangular-celular es nilpotente si, y sólo si, todas sus células en la diagonal principal son nilpotentes (la definición del carácter nilpotente se dio en el problema 947).

957. Sea $A = (A_{ij})$ una matriz celular con la particularidad de que A_{ij} es una célula de dimensiones $m_i \times n_j$ ($i = 1, 2, \ldots, s$, $j = 1, 2, \ldots, t$). Mostrar que la adición de la j-ésima fila, multiplicada a la izquierda por una matriz rectangular X de dimensiones $m_i \times m_j$, a la i-ésima fila celular, puede obtenerse, multiplicando A

a la izquierda por una matriz celular cuadrada regular P. Así como la adición de la j-ésima columna, multiplicada a la derecha por una matriz rectangular Y de dimensiones $n_j \times n_i$, a la i-ésima columna celular, puede obtenerse multiplicando A a la derecha por una matriz celular cuadrada regular Q. Hallar la forma de las matrices P y Q.

958*. Sea $R = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ una matriz celular, donde A es una matriz cuadrada regular de orden n. Demostrar que el rango de R es igual a n cuando, y sólo cuando, $D = CA^{-1}B$.

959*. Sean A una matriz regular de orden n, B una matriz de dimensiones $n \times q$ y C una matriz de dimensiones $p \times n$. Demostrar que si la matriz celular $R = \begin{pmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{pmatrix}$ se reduce a la forma de $R_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & X \end{pmatrix}$, transformando de modo elemental las filas con la particularidad de que en cada transformación participan bien sólo las primeras n filas, o bien a cierta fila de un número superior a n se le añade una de las primeras n filas, multiplicada por un número, entonces $X = CA^{-1}B$.

960. Sean A una matriz regular de orden n y E una matriz unidad del mismo orden. Demostrar que si transformando elementalmente la matriz celular $\begin{pmatrix} A & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ (como se indicó en el problema anterior) se reduce a la forma $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & X \end{pmatrix}$, entonces $X = A^{-1}$. Hallar, aplicando este método, la matriz, inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

961. Supongamos que se da un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

con una matriz regular de coeficientes A, B es una columna de términos independientes y E es una matriz unidad de orden n.

Mostrar que si una matriz celular $\begin{pmatrix} A & B \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ se reduce mediante las transformaciones indicadas en el problema 959 a la forma $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & X \end{pmatrix}$, la columna X nos da la solución del sistema de ecuaciones dado.

Resolver con ayuda de este método el sistema:

$$\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 7, \\ 4x - 3y + 2z &= 4, \\ 2x + y + 3z &= 13. \end{aligned}$$

962. Sean A una matriz regular de orden n, B una matriz de dimensiones $n \times p$ y E una matriz unidad de orden n. Mostrar que

si la matriz $\begin{pmatrix} A & B \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ se reduce mediante las transformaciones, indicadas en el problema 959, a la forma $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & X \end{pmatrix}$, la matriz X da la solución de la ecuación matricial $AX = B$.

Aplicando este método, resolver la ecuación señalada si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

963*. Supongamos que todos los pares (i, j) $(i = 1, 2, \ldots, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ están numerados en un determinado orden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{mn}$. Una matriz $C = A \times B$ de orden mn, compuesta de todos los posibles productos de los elementos de las matrices A y B en orden adecuado se denomina producto *de Kronecker* (o *directo*) de dos matrices cuadradas A de orden m y B de orden n. A saber, el elemento de la matriz C que yace en la i-ésima fila y j-ésima columna, se define de este modo:

$$c_{ij} = a_{i_1 j_1} b_{i_2 j_2}, \text{ donde } (i_1, i_2) = \alpha_i,\ (j_1, j_2) = \alpha_j.$$

Demostrar que:

a) $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$;

b) $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$;

c) $(AB) \times (CD) = (A \times C)(B \times D)$.

964*. Se denomina *producto directo derecho* de las matrices cuadradas A de orden m y B de orden n, la matriz celular $A \times {}^{\cdot}B = C = (C_{ij})$, donde $C_{ij} = a_{ij}B$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$. De modo análogo, se denomina producto directo izquierdo de las mismas matrices la matriz celular $A^{\cdot} \times B = D = (D_{ij})$, donde $D_{ij} = Ab_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

Demostrar que:

a) los dos productos introducidos son casos particulares del producto de Kronecker, definido en el problema anterior. Hallar el orden de la numercaión de los pares (i, j) que da los productos directos izquierdo y derecho;

b) $A \times {}^{\cdot}B = B^{\cdot} \times A$;

c) $A \times {}^{\cdot}(B \times {}^{\cdot}C) = (A \times {}^{\cdot}B) \times {}^{\cdot}C$;

d) si E_k es una matriz unidad de orden k, $E_m \times {}^{\cdot}E_n = E_n \times {}^{\cdot}E_m = E_{mn}$;

e) si A y B son matrices regulares, $(A \times {}^{\cdot}B)^{-1} = A^{-1} \times {}^{\cdot}B^{-1}$.

Para el producto izquierdo son válidas las propiedades análogas a c), d) y e).

965*. Haciendo uso de los dos problemas anteriores, demostrar que si A es una matriz de orden m y B, de orden n, entonces $| A \times B | = | A |^n \times | B |^m$ (véase el problema 540).

966*. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n. Se denomina matriz *recíproca* a A (o *adjunta* a A) la matriz $\hat{A} = (\hat{a}_{ij})$, donde

$\hat{a}_{ij} = A_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. En otras palabras, la matriz recíproca a A se obtiene, transponiendo una matriz compuesta de cofactores de los elementos de la matriz A.

Demostrar que:

a) $A\hat{A} = \hat{A}A = |A| E$, donde E es una matriz unidad;

b) $(\hat{\hat{A}}) = |A|^{n-2}A$ para $n > 2$, $(\hat{\hat{A}}) = A$ para $n = 2$.

967*. Mostrar que $\widehat{(AB)} = \hat{B}\cdot\hat{A}$, donde $\hat{A}$ es una matriz recíproca a A, determinada en el precedente problema.

968*. Se denomina **matriz** *asociada* a la matriz cuadrada A de orden n una matriz $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})$, donde $\hat{a}_{ij}$ es el menor del elemento a_{ij} de la matriz A. Demostrar que:

a) $\widetilde{(AB)} = \widetilde{A}\widetilde{B}$;

b) $(\widetilde{\widetilde{A}}) = A^{n-2}A$ para $n > 2$, $(\widetilde{\widetilde{A}}) = A$ para $n = 2$.

969*. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n y supongamos que todas las combinaciones de n números $1, 2, \ldots, n$ según p de los números $k_1 < k_2 < \ldots < k_p$, están numeradas en cualquier orden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$, donde $N = C_n^p$. La matriz $A_p = (a_{i,j;\,p})$ es la p-ésima matriz asociada a A compuesta de menores de orden p, situados en orden adecuado, a saber: $a_{i,j;\,p} = A\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \ldots, & i_p \\ j_1, & j_2, & \ldots, & j_p \end{pmatrix}$, donde α_i es la combinación de $i_1 < i_2 \ldots i_p$; α_j, la combinación de $j_1 < j_2 \ldots < j_p$.

Demostrar que:

a) $(AB)_p = A_pB_p$;

b) $(E_n)_p = E_N$, donde E_n y E_N son matrices unidades de órdenes n y N respectivamente;

c) si A es una matriz regular, entonces $(A^{-1})_p = (A_p)^{-1}$.

970. Hallar una numeración de las combinaciones de n números $1, 2, \ldots, n$ según p que para una matriz triangular A la matriz asociada A_p, definida en el problema anterior, también sea triangular con ceros por el mismo lado de la diagonal.

971*. Aplicando las propiedades de las matrices asociadas, demostrar que si A es una matriz cuadrada de orden n, entonces $|A_p| = |A|^{C_{n-1}^{p-1}}$ (véase el problema 551).

972*. Sean A una matriz regular de orden n y $B = A^{-1}$ una matriz inversa de A. Demostrar que los menores de cualquier orden de una matriz inversa se expresan a través de los menores de la matriz inicial de la siguiente manera:

$$B\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \ldots, & i_p \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_p \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{\sum\limits_{s=1}^{p}(i_s+k_s)} A\begin{pmatrix} k_1', & k_2', & \ldots, & k_{n-p}' \\ i_1', & i_2', & \ldots, & i_{n-p}' \end{pmatrix}}{|A|}, \qquad (1)$$

donde $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ junto con $i'_1 < i'_2 < \ldots < i'_{n-p}$ y $k_1 < k_2 < \ldots < k_p$ junto con $k'_1 < k'_2 < \ldots < k'_{n-p}$ forman un sistema completo de índices 1, 2, . . ., n.

973*. Demostrar que la p-ésima matriz asociada A_p (la definición se dio en el problema 969) para una matriz ortogonal A es ortogonal de por sí.

974*. Demostrar que la p-ésima matriz asociada A_p para una matriz unitaria A es unitaria de por sí.

§ 13. Matrices polinomiales

Reducir a la forma diagonal normal mediante transformaciones elementales las siguientes λ-matrices:

975. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. **976.** $\begin{pmatrix} \lambda^2-1 & \lambda-1 \\ \lambda+1 & \lambda^2+2\lambda+1 \end{pmatrix}$. **977.** $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda+5 \end{pmatrix}$.

978. $\begin{pmatrix} \lambda^2-1 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^3 \end{pmatrix}$. **979.** $\begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda^2+1 & \lambda^2 \\ 3\lambda-1 & 3\lambda^2-1 & \lambda^2+2\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda \end{pmatrix}$.

980. $\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda^2-\lambda & 3\lambda^2 \\ \lambda^2-\lambda & 3\lambda^2-\lambda & \lambda^3+4\lambda^2-3\lambda \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2+\lambda & 3\lambda^2+3\lambda \end{pmatrix}$. **981.** $\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$.

982. $\begin{pmatrix} \lambda(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$. **983.** $\begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$.

984*. Se denominan *factores invariantes* de la λ-matriz A de orden n los polinomios $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$, . . ., $E_n(\lambda)$, situados en la diagonal principal en la forma diagonal normal de la matriz A. Se denominan divisores de los menores de la matriz A los polinomios $D_1(\lambda)$, $D_2(\lambda)$, . . ., $D_n(\lambda)$, donde $D_k(\lambda)$ es el máximo divisor común (que se toma con el coeficiente mayor igual a la unidad) de los menores de orden k de la matriz A, si no todos esos menores son nulos, y $D_k(\lambda) = 0$ en caso contrario. Demostrar que $E_k(\lambda) \neq 0$ y $D_k(\lambda) \neq 0$ para $k = 1, 2, \ldots, r$, donde r es el rango de la matriz A, mientras que $E_k(\lambda) = D_k(\lambda) = 0$ para $k = r+1, \ldots, n$. Prosiguiendo, mostrar que $E_k(\lambda) = \frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)}$ ($k = 1, 2, \ldots, r$; $D_0 = 1$).

Reducir las siguientes λ-matrices a la forma diagonal normal, mediante los divisores de los menores, definidos en el problema 984.

985. $\begin{pmatrix} \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-2) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-2) \end{pmatrix}$.

986. $\begin{pmatrix} \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-2) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-3) \end{pmatrix}$.

987.
$$\begin{bmatrix} (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4) \end{bmatrix}.$$

988. $\begin{pmatrix} a^2cd & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^2cd & 0 & 0 \\ 0 & 0 & abc^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & abd^2 \end{pmatrix}$,

donde a, b, c, d son polinomios primos entre sí de dos en dos con relación a λ.

989. $\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 \\ 0 & g(\lambda) \end{pmatrix}$, donde $f(\lambda)$ y $g(\lambda)$ son polinomios con respecto a λ.

990. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & fg \\ 0 & fh & 0 \\ gh & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde f, g, h son polinomios con respecto a λ, primos entre sí de dos en dos y que poseen los coeficientes mayores iguales a la unidad.

991. $\begin{pmatrix} fg & 0 & 0 \\ 0 & fh & 0 \\ 0 & 0 & gh \end{pmatrix}$, donde f, g, h son polinomios con respecto a λ los con coeficientes mayores iguales a la unidad, primos entre sí en conjunto, pero no es obligatorio que sean primos entre sí de dos en dos.

992. $\begin{pmatrix} fg & 0 & 0 \\ 0 & fh & 0 \\ 0 & 0 & gh \end{pmatrix}$, donde f, g, h son cualesquiera polinomios con respecto a λ, con los coeficientes mayores iguales a la unidad.

993. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. 994. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

995. $\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5+\lambda \end{pmatrix}$.

996. $\begin{pmatrix} \lambda+\alpha & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & \lambda+\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+\alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \lambda+\alpha \end{pmatrix}$.

997. $\begin{pmatrix} 2\lambda^2-12\lambda+16 & 2-\lambda & 2\lambda^2-12\lambda+17 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ \lambda^2-6\lambda+7 & 2-\lambda & \lambda^2-6\lambda+8 \end{pmatrix}$.

998. $\begin{pmatrix} 3\lambda^2-5\lambda+2 & 0 & 3\lambda^2-6\lambda+3 \\ 2\lambda^2-3\lambda+1 & \lambda-1 & 2\lambda^2-4\lambda+2 \\ 2\lambda^2-2\lambda & 0 & 2\lambda^2-4\lambda+2 \end{pmatrix}$.

999. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$.

Aclarar si las siguientes matrices son equivalentes entre sí:

1000.

$$A = \begin{pmatrix} 3\lambda+1 & \lambda & 4\lambda-1 \\ 1-\lambda^2 & \lambda-1 & \lambda-\lambda^2 \\ \lambda^2+\lambda+2 & \lambda & \lambda^2+2\lambda \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda-2 & \lambda^2-2\lambda \\ 2\lambda & 2\lambda-3 & \lambda^2-2\lambda \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1001.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda^2+\lambda+1 & 3\lambda-\lambda^2 & 2\lambda^2+\lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2+\lambda & 3\lambda-\lambda^2 & 2\lambda^2+\lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2-\lambda & 2\lambda-\lambda^2 & 2\lambda^2+\lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2 & -\lambda^2 & 2\lambda^2 & \lambda^2 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & \lambda^2+1 & 3\lambda^2 & \lambda^2 \\ 2 & \lambda^2+1 & 3\lambda^2 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 3\lambda^2 & \lambda^2 \\ \lambda^2 & -\lambda^2 & 2\lambda^2 & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

1002.

$$A = \begin{pmatrix} 3\lambda^3-6\lambda^2+\lambda+3 & 2\lambda^3-4\lambda^2+3\lambda-1 & \lambda^3-2\lambda^2+\lambda \\ 3\lambda^2-8\lambda+5 & 2\lambda^2-4\lambda+1 & \lambda^2-2\lambda+1 \\ 3\lambda^3-3\lambda^2-5\lambda+6 & 2\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+1 & \lambda^3-\lambda^2-\lambda+1 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 3\lambda^3-9\lambda^2+7\lambda+1 & 2\lambda^3-6\lambda^2+7\lambda-2 & \lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1 \\ 3\lambda^3-9\lambda^2+9\lambda-5 & 2\lambda^3-6\lambda^2+6\lambda-1 & \lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1 \\ 3\lambda^3-9\lambda^2+5\lambda+5 & 2\lambda^3-6\lambda^2+8\lambda-2 & \lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 3\lambda^2-3\lambda+1 & \lambda^2-\lambda & 0 \\ 2\lambda^2-\lambda-1 & 7\lambda-3\lambda^2-4 & \lambda^2-2\lambda+1 \\ 5\lambda^2-7\lambda+3 & 5\lambda-2\lambda^2-3 & \lambda^2-2\lambda+1 \end{pmatrix}.$$

1003. La λ-matriz se denomina *unimodular* si su determinante es un polinomio de grado cero con respecto a λ, o sea, una constante distinta de cero. Hallar la forma diagonal normal de la λ-matriz unimodular.

1004. Demostrar que la matriz inversa de λ-matriz será λ-matriz si, y sólo si, la matriz A dada sea unimodular.

1005*. Demostrar la afirmación: para que dos λ-matrices rectangulares A y B, compuestas cada una de m filas y n columnas, sean equivalentes, es necesario y suficiente que se cumpla la igualdad $B = PAQ$, donde P y Q son λ-matrices unimodulares de órdenes m y n, respectivamente. Mostrar que las matrices requeridas P y Q pueden encontrarse de la siguiente manera: una vez hallada una serie de transformaciones elementales que pasan A en B, aplicar todas las transformaciones de las filas en el mismo orden a la matriz unidad E_m

de orden m, y todas las transformaciones de las columnas en el mismo orden a la matriz unidad E_n de orden n.

Para la λ-matriz A dada hallar, usando el método indicado en el problema 1005, las matrices unimodulares P y Q, tales que la matriz $B = PAQ$ tenga una forma diagonal normal (las matrices P y Q no se determinan unívocamente):

1006. $A = \begin{pmatrix} \lambda^3-\lambda+4 & \lambda^3+3 \\ \lambda^2-2\lambda+3 & \lambda^2-\lambda+2 \end{pmatrix}$.

1007. $A = \begin{pmatrix} \lambda^4+4\lambda^3+4\lambda^2+\lambda+2 & \lambda^3+4\lambda^2+4\lambda \\ \lambda^4+5\lambda^3+8\lambda^2+5\lambda+2 & \lambda^3+5\lambda^2+8\lambda+4 \end{pmatrix}$.

1008.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda^4+3\lambda^3-5\lambda^2+\lambda+1 & 2\lambda^4+3\lambda^3-5\lambda^2+\lambda-1 & 2\lambda^4+2\lambda^3-4\lambda^2 \\ \lambda^4-\lambda^3+1 & 2\lambda^4-\lambda^3-\lambda^2 & 2\lambda^4-2\lambda^3 \\ \lambda^4+2\lambda^3-4\lambda^2+\lambda+1 & 2\lambda^4-2\lambda^3-4\lambda^2+\lambda-1 & 2\lambda^4+\lambda^3-3\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Para las λ-matrices A y B dadas hallar las λ-matrices unimodulares P y Q que satisfacen la igualdad $B = PAQ$ (matrices P y Q no se determinan unívocamente (véase el problema 1005)):

1009.

$$A = \begin{pmatrix} 2\lambda^2-\lambda+1 & 3\lambda^2-2\lambda+1 \\ 2\lambda^2+\lambda-1 & 3\lambda^2+\lambda-2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3\lambda^3+7\lambda+2 & 3\lambda^3+4\lambda-1 \\ 2\lambda^3+5\lambda+1 & 2\lambda^3+3\lambda-1 \end{pmatrix}.$$

1010.

$$A = \begin{pmatrix} 2\lambda^2-\lambda-1 & 2\lambda^3+\lambda^2-3\lambda \\ \lambda^2-\lambda & \lambda^3-\lambda \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} \lambda^3-\lambda^2+\lambda-1 & 2\lambda^3-\lambda^2+\lambda-2 \\ \lambda^3-\lambda^2 & 2\lambda^3-\lambda^2-\lambda \end{pmatrix}.$$

1011.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda^2+\lambda-1 & \lambda+1 & \lambda^2-2 \\ \lambda^3+2\lambda^2 & \lambda^2+2\lambda+1 & \lambda^3+\lambda^2-2\lambda-1 \\ \lambda^3+\lambda^2-\lambda+1 & \lambda^2+\lambda & \lambda^3-2\lambda+1 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 4\lambda+3 & 2\lambda+2 & 2\lambda^2-2\lambda-3 \\ 10\lambda+2 & 5\lambda+5 & 5\lambda^2-5\lambda-2 \\ 4\lambda^2-7\lambda-8 & 2\lambda^2-3\lambda-5 & 2\lambda^3-7\lambda^2+2\lambda+8 \end{pmatrix}.$$

1012.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda^3-\lambda^2-\lambda+1 & 2\lambda^2+2\lambda & \lambda^3+\lambda^2 \\ 2\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda+2 & 5\lambda^2+5\lambda & 2\lambda^3+2\lambda^2 \\ \lambda^3-\lambda & \lambda^2+\lambda & \lambda^3+\lambda^2 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} \lambda^2+2\lambda+1 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ 2\lambda^2+3\lambda+1 & \lambda^3+3\lambda^2+2\lambda & \lambda^3+\lambda^2 \\ 3\lambda^2+5\lambda+2 & 2\lambda^3+5\lambda^2+3\lambda & 2\lambda^3+2\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

1013.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda^2+3\lambda-4 & \lambda^2+2\lambda-3 & \lambda^2+\lambda-2 \\ 2\lambda^2+3\lambda-5 & 2\lambda^2+2\lambda-4 & 2\lambda^2+\lambda-3 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 2\lambda^2+2\lambda-4 & 3\lambda^2+2\lambda-5 & \lambda^2+2\lambda-3 \\ 2\lambda^2+\lambda-3 & 3\lambda^2+\lambda-4 & \lambda^2+\lambda-2 \end{pmatrix}.$$

1014.

$$A=\begin{pmatrix} \lambda^3+6\lambda^2+6\lambda+5 & \lambda^3+4\lambda^2+4\lambda+3 \\ \lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+2 & \lambda^3+2\lambda^2+2\lambda+1 \\ 2\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1 & 2\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda \end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix} \lambda^3+\lambda^2+\lambda & 2\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1 \\ 3\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda-1 & 6\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda-4 \\ \lambda^3-\lambda^2-\lambda-2 & 2\lambda^3-\lambda^2-\lambda-3 \end{pmatrix}.$$

Hallar los factores invariantes de las siguientes λ-matrices:

1015. $\begin{pmatrix} 3\lambda^2+2\lambda-3 & 2\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda-3 \\ 4\lambda^2+3\lambda-5 & 3\lambda-2 & \lambda^2+3\lambda-4 \\ \lambda^2+\lambda-4 & \lambda-2 & \lambda-1 \end{pmatrix}.$

1016. $\begin{pmatrix} 3\lambda^3-2\lambda+1 & 2\lambda^2+\lambda-1 & 3\lambda^3+2\lambda^2-2\lambda-1 \\ 2\lambda^3-2\lambda & \lambda^2-1 & 2\lambda^3+\lambda^2-2\lambda-1 \\ 5\lambda^3-4\lambda+1 & 3\lambda^2+\lambda-2 & 5\lambda^3+3\lambda^2-4\lambda-2 \end{pmatrix}.$

1017.

$$\begin{pmatrix} 2\lambda^3-\lambda^2+2\lambda-1 & 2\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda-3 & \lambda^3-2\lambda^2+\lambda-2 & 5\lambda^3-2\lambda^2+5\lambda-2 \\ \lambda^3+\lambda^2+\lambda+1 & \lambda^3-3\lambda^2+\lambda-3 & -\lambda^3-\lambda^2-\lambda-1 & 7\lambda^3-\lambda^2+7\lambda-1 \\ \lambda^3-2\lambda^2+\lambda-2 & \lambda^3+\lambda & 2\lambda^3-\lambda^2+2\lambda-1 & -2\lambda^3-\lambda^2-2\lambda-1 \\ 3\lambda^3-2\lambda^2+3\lambda-2 & 3\lambda^3-4\lambda^2+3\lambda-4 & 2\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda-3 & 6\lambda^3-3\lambda^2+6\lambda-3 \end{pmatrix}.$$

1018.

$$\begin{pmatrix} \lambda^3+\lambda^2-\lambda+3 & \lambda^3-\lambda^2+\lambda & 2\lambda^3+\lambda^2-\lambda+4 & \lambda^3+\lambda^2-\lambda+2 \\ \lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+6 & \lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-2 & 2\lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+7 & \lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+4 \\ \lambda^3+2\lambda^2-2\lambda+4 & \lambda^3-2\lambda^2+2\lambda-1 & 2\lambda^3+2\lambda^2-2\lambda+5 & \lambda^3+2\lambda^2-2\lambda+3 \\ 2\lambda^3+\lambda^2-\lambda+5 & 2\lambda^3-\lambda^2+\lambda+1 & 4\lambda^3+\lambda^2-\lambda+7 & 2\lambda^3+\lambda^2-\lambda+3 \end{pmatrix}.$$

1019. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & \lambda & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & n-2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$

1020*. $\begin{pmatrix} \lambda-\alpha & \beta & \beta & \beta & \dots & \beta \\ 0 & \lambda-\alpha & \beta & \beta & \dots & \beta \\ 0 & 0 & \lambda-\alpha & \beta & \dots & \beta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda-\alpha \end{pmatrix}$

(el orden de la matriz es igual a n).

Se denominan divisores elementales de la λ-matriz A los polinomios $e_1(\lambda), e_2(\lambda), \dots, e_s(\lambda)$ con los coeficientes mayores iguales a la unidad, cuando estos polinomios coinciden con las potencias superiores de los factores irreducibles, participantes de los desarrollos de los factores invariantes $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda), \dots, E_n(\lambda)$ de la matriz A según los factores irreducibles. En este caso, el conjunto de los divisores elementales de la matriz A contiene cada polinomio $E_i(\lambda)$ tantas veces cuantos son los factores invariantes $E_k(\lambda)$ que lo tienen en su desarrollo. El desarrollo en factores irreducibles se realiza sobre el campo conmutativo donde se examinan los polinomios que son elementos de la matriz A. En lo sucesivo si no se estipula lo contrario, se estudian los divisores elementales de un campo de números complejos, es decir, las potencias superiores de los polinomios tipo $\lambda-\alpha$ que entran en los desarrollos de los factores invariantes de la matriz A según los factores lineales.

Hallar los divisores elementales de las siguientes λ-matrices:

1021. $\begin{pmatrix} \lambda^3+2 & \lambda^3+1 \\ 2\lambda^3-\lambda^2-\lambda+3 & 2\lambda^3-\lambda^2-\lambda+2 \end{pmatrix}$.

1022. $\begin{pmatrix} \lambda^3-2\lambda^2+2\lambda-1 & \lambda^2-2\lambda+1 \\ 2\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-1 & 2\lambda^2-2\lambda \end{pmatrix}$.

1023. $\begin{pmatrix} \lambda^2+2\lambda & 2\lambda+1 & \lambda^2+1 \\ \lambda^2+4\lambda+4 & 2\lambda+3 & \lambda^2+4\lambda+3 \\ \lambda^2-4\lambda+3 & 2\lambda-1 & \lambda^2-4\lambda+2 \end{pmatrix}$.

1024.

$$\begin{pmatrix} \lambda^2-2\lambda-8 & \lambda^2+4\lambda+4 & \lambda^2-4 & \lambda^2-3\lambda-10 \\ \lambda^4+\lambda^3-\lambda-10 & 2\lambda^2+5\lambda+2 & \lambda^3+3\lambda^2-\lambda-6 & \lambda^4+\lambda^3-2\lambda-12 \\ \lambda^4+\lambda^3-2\lambda^2-3\lambda-6 & \lambda^2+4\lambda+4 & \lambda^4+\lambda^3-2\lambda^2-\lambda-2 & \lambda^4+\lambda^3-2\lambda^2-4\lambda-8 \\ \lambda^4+\lambda^3-\lambda^2+\lambda-2 & \lambda^2+\lambda-2 & \lambda^3+2\lambda^2-\lambda-2 & \lambda^4+\lambda^3-\lambda^2+\lambda-2 \end{pmatrix}.$$

1025.

$$\begin{pmatrix} \lambda^2-2 & \lambda^2+\lambda+3 & \lambda^2+2 & \lambda^2-3 \\ \lambda^2+3\lambda-1 & \lambda^2+3\lambda+3 & \lambda^2+2\lambda+1 & \lambda^2+3\lambda-2 \\ 2\lambda^2-4 & \lambda^2+\lambda+4 & \lambda^2+3 & 2\lambda^2-5 \\ 2\lambda^2+3\lambda-3 & \lambda^2+3\lambda+4 & \lambda^2+2\lambda+2 & 2\lambda^2+3\lambda-4 \end{pmatrix}.$$

Hallar los divisores elementales de las siguientes λ-matrices en el campo de los números racionales, el de los números reales y el de los números complejos:

1026. $\begin{pmatrix} \lambda^2+2 & \lambda^2+1 & 2\lambda^2-2 \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+1 & 2\lambda^2-2 \\ \lambda^2+2 & \lambda^2+1 & 3\lambda^2-5 \end{pmatrix}$.

1027. $\begin{pmatrix} 2\lambda^2+3 & \lambda^2+1 & \lambda^6+6\lambda^4+\lambda^2+2 \\ 4\lambda^2+11 & 2\lambda^2+5 & 2\lambda^6+12\lambda^4+2\lambda^2-26 \\ 2\lambda^2+3 & \lambda^2+1 & 2\lambda^6+12\lambda^4+\lambda^2-30 \end{pmatrix}$.

1028.

$$\begin{pmatrix} \lambda^4+1 & \lambda^7-\lambda^4+\lambda^3-1 & \lambda^4-4\lambda^3+4\lambda-5 \\ 2\lambda^4+3 & 2\lambda^7-2\lambda^4+4\lambda^3-2 & 3\lambda^4-10\lambda^3+\lambda^2+10\lambda-14 \\ \lambda^4+2 & \lambda^7-\lambda^4+2\lambda^3-2 & 2\lambda^4-6\lambda^3+\lambda^2+6\lambda-9 \end{pmatrix}.$$

Hallar la forma diagonal normal de una λ-matriz cuadrada si se saben sus divisores elementales, el rango r y el orden n:

1029. $\lambda+1,\ \lambda+1,\ (\lambda+1)^2,\ \lambda-1,\ (\lambda-1)^2;\ r=4,\ n=5.$

1030. $\lambda+2,\ (\lambda+2)^2,\ (\lambda+2)^3,\ \lambda-2,\ (\lambda-2)^3;\ r=n=4.$

1031. $\lambda-1,\ \lambda-1,\ (\lambda-1)^3,\ \lambda+2,\ (\lambda+2)^2;\ r=4;\ n=5.$

1032*. Demostrar que el conjunto de divisores elementales de una λ-matriz diagonal se obtiene uniendo (con las debidas repeticiones) los conjuntos de divisores elementales de todos los elementos diagonales de dicha matriz.

1033*. Demostrar que el conjunto de divisores elementales de una λ-matriz diagonal-celular es igual a la unión (con las debidas repeticiones) de conjuntos de divisores elementales de todas sus células diagonales.

Haciendo uso de los problemas 1032 ó 1033, hallar la forma diagonal normal de las siguientes λ-matrices:

1034.

$$\begin{pmatrix} \lambda(\lambda-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda+1)^3 \end{pmatrix}.$$

1035.

$$\begin{pmatrix} \lambda^2-4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3-2\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3-4\lambda \end{pmatrix}.$$

1036.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^3+6\lambda+9\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda^2-6\lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2-4\lambda+4 & 0 & 0 \\ \lambda^4+\lambda^3-6\lambda^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1037.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^4+2\lambda^2-2\lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda^4-2\lambda^2+2\lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda^2+2\lambda+1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-2\lambda+1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1038.

$$\begin{pmatrix} \lambda^2+2\lambda-3 & \lambda^2+\lambda-2 & 0 & 0 \\ 2\lambda^2+2\lambda-4 & 2\lambda^2+\lambda-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & \lambda+2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & \lambda^2+\lambda-2 \end{pmatrix}.$$

1039.

$$\begin{pmatrix} \lambda^2-\lambda-2 & \lambda^3+\lambda^2-\lambda-1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-4 & \lambda^3+2\lambda^2-\lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2\lambda & \lambda^2+5\lambda-2 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda-2 & \lambda^2+6\lambda-7 \end{pmatrix}.$$

1040.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda^3-\lambda^2-\lambda-2 & \lambda^3-2\lambda-4 \\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda^2-6\lambda & \lambda^2+\lambda-6 \\ \lambda^2-2\lambda+1 & \lambda-2 & 0 & 0 \\ \lambda^3-2\lambda^2+6\lambda-1 & \lambda^2-2\lambda+5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1041.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^2-2\lambda-3 & \lambda^3+\lambda^2-9\lambda-9 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-\lambda-2 & \lambda^3+2\lambda^2-5\lambda-6 \\ 0 & 0 & \lambda^2-2\lambda+1 & 0 & 0 \\ \lambda^2+2\lambda-3 & \lambda^2+\lambda-2 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^3+2\lambda^3+\lambda-4 & \lambda^3+2\lambda^2-3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Después de determinar la equivalencia y la forma diagonal normal de las matrices de números enteros tal como se hizo en los problemas 942, 943, hallar los máximos comunes divisores D_k de los menores de orden k de las siguientes matrices, reduciéndolas a la forma diagonal normal mediante transformaciones elementales:

1042. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & -1 \\ 6 & 12 & 14 & 5 \\ 0 & 4 & 14 & -1 \\ 10 & 6 & -4 & 11 \end{pmatrix}$. **1043.** $\begin{pmatrix} 0 & 6 & -9 & -3 \\ 12 & 24 & 9 & 9 \\ 30 & 42 & 45 & 27 \\ 66 & 78 & 81 & 63 \end{pmatrix}$.

1044. Demostrar que cualquier λ-matriz de rango r puede reducirse mediante las transformaciones elementales sólo de las filas (así como sólo de las columnas) a una forma triangular o trapezoidal con la particularidad de que los ceros, según el deseo de cada uno, pueden obtenerse por encima o por debajo de la diagonal principal, y los elementos, distintos de cero, se encontrarán sólo en las primeras r filas (respectivamente, en las primeras r columnas).

1045*. Demostrar que cada λ-matriz regular A puede representarse en forma de $A = PR$, donde P es una λ-matriz unimodular y R, una λ-matriz triangular, cuyos elementos en la diagonal principal tienen el coeficiente mayor igual a la unidad, por debajo de la diagonal principal son nulos, y por encima de ella tienen el grado inferior al del elemento de la diagonal principal de la misma columna (o son nulos), además dicha representación es la única.

§ 14. Matrices semejantes. Polinomios mínimo y característico. Formas diagonal y de Jordan de una matriz. Funciones de matrices

Todos los problemas de este párrafo se plantean en forma matricial. Por ejemplo, las propiedades de los números característicos de la matriz y la reducción de la matriz a la forma de Jordan se examinan sin relacionarlas con las propiedades de los vectores propios y los subespacios invariantes de la correspondiente transformación lineal. Dicha relación (por ejemplo, la búsqueda de la base en la que la matriz de la transformación lineal dada tiene la forma de Jordan) se estudia en la parte IV. Esto no impide utilizar los problemas de este párrafo al estudiar las propiedades de las transformaciones lineales en la medida en la que se haya asimilado la relación entre las transformaciones lineales y sus matrices en cualquier base.

1046. La matriz A se denomina *semejante* a la matriz B (lo que se designa del siguiente modo: $A \approx B$) si existe una matriz regular T, tal que $B = T^{-1}AT$. Mostrar que la relación de la semejanza posee las siguientes propiedades:

a) $A \approx A$; b) si $A \approx B$, entonces $B \approx A$;
c) si $A \approx B$ y $B \approx C$, entonces $A \approx C$.

1047. Demostrar que si por lo menos una de las dos matrices A y B es regular, las matrices AB y BA son semejantes.

Dar un ejemplo de dos matrices degeneradas A y B, para las cuales las matrices AB y BA no serán semejantes.

1048*. Hallar todas las matrices, cada una de las cuales es semejante a sí misma.

1049. Sea la matriz B obtenida de A, permutando la i-ésima y j-ésima filas, así como de la i-ésima y j-ésima columnas. Demostrar que A y B son semejantes y hallar la matriz regular T para la cual $B = T^{-1}AT$.

1050*. Mostrar que la matriz A es semejante a la matriz B, obtenida mediante la reflexión especular en su centro.

1051. Sea $i_1, i_2, \ldots, i_n$ cualquier permutación de los números $1, 2, \ldots, n$. Demostrar que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \ldots & a_{i_1i_n} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \ldots & a_{i_2i_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_n}a_{i_1} & a_{i_ni_2} & \ldots & a_{i_ni_n} \end{pmatrix}$$

son semejantes.

1052. Supongamos que se dan las matrices A y B semejantes entre sí. Mostrar que el conjunto de todas las matrices regulares T, para las cuales $B = T^{-1}AT$, se obtiene del conjunto de todas las matrices regulares, permutables con A, multiplicando a la derecha estas matrices por una matriz cualquiera T_0, cuya propiedad es $B = T_0^{-1}AT_0$.

1053. Demostrar que si la matriz A es semejante a una matriz diagonal, la p-ésima matriz A_p asociada con ella (problema 969) también es semejante a la matriz diagonal.

1054. Demostrar que si dos matrices A y B son semejantes a matrices diagonales, su producto de Kronecker $A \times B$ (problema 963) también es una matriz semejante a la diagonal.

1055. Demostrar que si las matrices A y B son semejantes, las p-ésimas matrices A_p y B_p asociadas con ellas (tomadas para cualesquiera dos posiciones de las combinaciones de n números de filas y columnas según p) son también semejantes.

1056. Demostrar que si las matrices A_1, B_1 son semejantes a A_2, B_2, respectivamente, los productos de Kronecker $A_1 \times B_1$ y $A_2 \times B_2$ (tomados para cualesquiera dos posiciones de los pares de índices) son también semejantes entre sí.

1057. Demostrar que si la λ-matriz cuadrada B se representa en forma de $B = B_0\lambda^s + B_1\lambda^{s-1} + \ldots + B_s$, donde $B_0, B_1, \ldots, B_s$ son matrices independientes de λ y la matriz B_0 es regular, entonces cualquier λ-matriz cuadrada A del mismo orden que tiene B, puede dividirse por B a la izquierda o a la derecha, es decir, existen el cociente Q_1 y el resto de la división R_1 derechos, tales que $A = BQ_1 + R_1$, y el cociente Q_2 y resto R izquierdos, tales que $A = Q_2B + R_2$, con la particularidad de que los grados de los elemen-

tos de las matrices R_1 y R_2 con respecto a λ son inferiores a s y ambos pares Q_1, R_1 y Q_2, R_2 se definen unívocamente.

1058. Dividir a la izquierda la matriz

$$A=\begin{pmatrix}-2\lambda^2+5\lambda+3 & -\lambda^2+3\lambda+2 & -\lambda+6\\ -3\lambda^2+7\lambda+11 & -3\lambda^2+9\lambda+1 & -2\lambda+8\\ -\lambda^2+2\lambda+8 & -2\lambda^2+5\lambda+3 & -\lambda+4\end{pmatrix}$$

por $B-\lambda E$, donde

$$B=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

1059. Dividir a la derecha la matriz

$$A=\begin{pmatrix}-\lambda^3+\lambda^2+3\lambda+6 & \lambda^2+2\lambda & \lambda^2+2\lambda+6\\ -2\lambda^3+2\lambda^2+9\lambda+8 & \lambda^2+6\lambda+1 & 2\lambda^2+7\lambda+8\\ -\lambda^3+\lambda^2+3\lambda+5 & \lambda^2+2\lambda-9 & \lambda^2+5\lambda-2\end{pmatrix}$$

por $B-\lambda E$, donde

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

1060*. Demostrar que si dos matrices A y B con elementos numéricos (o con elementos de cierto campo P) son semejantes, sus matrices características $A-\lambda E$ y $B-\lambda E$ son equivalentes.

1061*. Demostrar que si las matrices características $A-\lambda E$ y $B-\lambda E$ de dos matrices A y B son equivalentes, entonces esas mismas matrices son semejantes. Además, mostrar que si $B-\lambda E = P(A-\lambda E)Q$, donde P y Q son λ-matrices unimodulares y P_0, Q_0 son los restos de la división P a la izquierda y Q, a la derecha por $B-\lambda E$, entonces $B=P_0AQ_0$ y $P_0Q_0=E$, o sea, la matriz Q_0 efectúa la semejante transformación de la matriz A en la B.

1062. Demostrar que cualquier matriz cuadrada A es semejante a su matriz traspuesta A'.

Aclarar si son semejantes entre sí las siguientes matrices:

1063. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -5\\ 2 & 6 & -10\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}6 & 20 & -34\\ 6 & 32 & -51\\ 4 & 20 & -32\end{pmatrix}$.

1064. $A=\begin{pmatrix}6 & 6 & -15\\ 1 & 5 & -5\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}37 & -20 & -4\\ 34 & -17 & -4\\ 119 & -70 & -11\end{pmatrix}$.

1065. $A=\begin{pmatrix}4 & 6 & -15\\ 1 & 3 & -5\\ 1 & 2 & -4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ -2 & -6 & 13\\ -1 & -4 & 8\end{pmatrix}$;

$$C=\begin{pmatrix}-13 & -70 & 119\\ -4 & -19 & 34\\ -4 & -20 & 35\end{pmatrix}.$$

1066. $A=\begin{pmatrix} 14 & -2 & -7 & -1 \\ 20 & -2 & -11 & -2 \\ 19 & -3 & -9 & -1 \\ -6 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 4 & 10 & -19 & 4 \\ 1 & 6 & -8 & 3 \\ 1 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$$C=\begin{pmatrix} 41 & -4 & -26 & -7 \\ 14 & -13 & -91 & -18 \\ 40 & -4 & -25 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicando el método indicado en el problema 1061, para las matrices A y B dadas hallar una matriz regular T, tal que $B = T^{-1}AT$ (la matriz buscada T se determina de modo no unívoco):

1067*. $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 38 & -81 \\ 16 & -34 \end{pmatrix}$.

1068*. $A=\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 45 & -16 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 14 & -60 \\ 3 & -13 \end{pmatrix}$.

1069. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 24 & -11 & -22 \\ 20 & -8 & -20 \\ 12 & -6 & -10 \end{pmatrix}$.

1070*. Demostrar que los coeficientes del polinomio característico $|A - \lambda E|$ de la matriz A se expresan de la siguiente manera, mediante los elementos de dicha matriz:

$$|A - \lambda E| = (-\lambda)^n + c_1(-\lambda)^{n-1} + c_2(-\lambda)^{n-2} + \ldots + c_n,$$

donde c_k es la suma de todos los menores principales de orden k de la matriz A (el menor se denomina principal si los números de las filas ocupadas por él coinciden con los números de las columnas).

1071*. Hallar los números característicos (las raíces del polinomio característico) de la matriz $A'A$, donde $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y A' es la matriz obtenida, trasponiendo A.

1072. Demostrar que la suma de los números característicos de la matriz A es igual a su traza (o sea, a la suma de elementos de la diagonal principal), y el producto de estos números es igual al determinante $|A|$.

1073. Demostrar que todos los números característicos de la matriz A son distintos de cero si, y sólo si, la matriz A es regular.

1074*. Sean $p > 0$ la multiplicidad de la raíz λ_0 del polinomio característico $|A - \lambda E|$ de la matriz A de orden n, r el rango y $d = n - r$ el defecto de la matriz $A - \lambda_0 E$. Demostrar la validez de las desigualdades

$$1 \leqslant d = n - r \leqslant p.$$

1075. Citar algunos ejemplos de matrices de orden n para las cuales la primera desigualdad o la segunda del problema anterior se convierten en igualdad, o sea, $d = 1$ ó $d = p$.

1076*. Demostrar que los números característicos de la matriz inversa A^{-1} (teniendo en cuenta su multiplicidad) son iguales a las magnitudes inversas para los números característicos de la matriz A.

1077*. Demostrar que los números característicos de la matriz A^2 (teniendo en cuenta su multiplicidad) son iguales a los cuadrados de los números característicos de la matriz A.

1078*. Demostrar que los números característicos de la matriz A^p (teniendo en cuenta su multiplicidad) son iguales a las p-ésimas potencias de los números característicos de la matriz A.

1079*. Sean $\varphi(\lambda) = |A - \lambda E|$ un polinomio característico, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los números característicos de la matriz A y $f(\lambda)$ un polinomio arbitrario. Demostrar que el determinante de la matriz $f(A)$ satisface la igualdad $|f(A)| = f(\lambda_1) f(\lambda_2) \ldots f(\lambda_n) = R(f, \varphi)$, donde $R(f, \varphi)$ es la resultante de los polinomios f y φ. Pero si se determina el polinomio característico como $\varphi(\lambda) = |\lambda E - A|$, entonces

$$|f(A)| = R(\varphi, f).$$

Recordemos que se denomina *resultante* de dos polinomios

$$f(x) = a_0 \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i) \text{ y } g(x) = b_0 \prod_{j=1}^{s} (x - \beta_j)$$

el número

$$R(f, g) = a_0^s b_0^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{s} (\alpha_i - \beta_j) = a_0^s \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i) = (-1)^{ns} b_0^n \prod_{j=1}^{s} f(\beta_j).$$

1080*. Demostrar que si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son números característicos de la matriz A y $f(x)$ es un polinomio, entonces $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$ serán números característicos de la matriz $f(A)$.

1081*. Demostrar que si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son números característicos de la matriz A y $f(x) = g(x)/h(x)$ es una función racional, definida para el valor de $x = A$ (es decir, que satisface la condición $|h(A)| \neq 0$), entonces $|f(A)| = f(\lambda_1) f(\lambda_2) \ldots f(\lambda_n)$ y los números $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$ serán números característicos de la matriz $f(A)$.

1082*. Demostrar que si A y B son matrices cuadradas del mismo orden, los polinomios característicos de las matrices AB y BA coinciden.

1083*. Hallar los números característicos de una matriz cíclica

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \ldots & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_1 \end{pmatrix}.$$

1084*. Hallar los números característicos de la matriz de orden n

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1085*. Se denomina *matriz de Jordan* una matriz diagonal-celular con células diagonales tipo

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix},$$

que se llaman células de Jordan. La matriz de Jordan A_j, semejante a la matriz A, se denomina forma de Jordan de la matriz A.

Haciendo uso del teorema de que el conjunto de divisores elementales de una matriz diagonal-celular es igual a la unión de los conjuntos de divisores elementales de sus células diagonales (véase el problema 1033), demostrar que sobre el campo de los números complejos (o sobre cualquier campo que contiene todos los números característicos de la matriz A) cualquier matriz A tiene la forma de Jordan, y además la única, con una precisión de hasta el orden de las células.

Escribir la forma de Jordan A_j de la matriz A si se dan los factores invariantes $E_i(\lambda)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ de su matriz característica $A - \lambda E$:

1086. $E_1(\lambda) = E_2(\lambda) = 1$, $E_3(\lambda) = E_4(\lambda) = \lambda - 1$, $E_5(\lambda) = E_6(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$.

1087. $E_1(\lambda) = E_2(\lambda) = E_3(\lambda) = 1$, $E_4(\lambda) = \lambda + 1$, $E_5(\lambda) = (\lambda + 1)^2$, $E_6(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5)$.

1088. $E_1(\lambda) = E_2(\lambda) = 1$, $E_3(\lambda) = \lambda - 2$, $E_4(\lambda) = \lambda^2 - 4$.

1089. Demostrar que para cualquier λ-matriz cuadrada $A(\lambda)$ de orden n, cuyo determinante es un polinomio de grado n con respecto a λ, existe una matriz numérica B de orden n, tal que la matriz $A(\lambda)$ es equivalente a la matriz característica $B - \lambda E$.

Hallar la forma de Jordan de las siguientes matrices:

1090. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. **1091.** $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$. **1092.** $\begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}$.

1093. $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. **1094.** $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. **1095.** $\begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{pmatrix}$.

1096. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. **1097.** $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. **1098.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

1099. $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$. **1100.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$. **1101.** $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, donde $\alpha \neq 0$.

1102. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}$. **1103.** $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 3 & 4 & -12 \\ 2 & 3 & -8 \end{pmatrix}$. **1104.** $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1105. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. **1106.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

1107. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. **1108.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

1109. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ el orden de la matriz es igual a n.

1110. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, el orden de la matriz es igual a n.

1111. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. **1112.** $\begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \\ 0 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & n & \dots & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$.

1113. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$. **1114.** $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

1115. Hallar la forma de Jordan de la matriz tipo

$$\begin{pmatrix} \alpha & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \alpha & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

a condición de que $a_{12}a_{23} \ \dots \ a_{n-1,\,n} \neq 0$.

1116. Demostrar que si el polinomio característico $|A - \lambda E|$ de la matriz A no tiene raíces múltiples, entonces A es semejante a una matriz diagonal (los elementos de la matriz T que transforma A en la forma diagonal, pertenecen al campo que contiene todos los números característicos de la matriz A).

1117. Demostrar que la matriz A sobre el campo P dado es semejante a una matriz diagonal cuando, y sólo cuando, el último factor invariante $E_n(\lambda)$ de la matriz característica $A - \lambda E$ no tiene raíces múltiples y todas sus raíces pertenecen al campo P.

Aclarar si son las siguientes matrices semejantes a las diagonales en los campos de los números complejos, reales y racionales:

1118. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$. **1119.** $\begin{pmatrix} 8 & 15 & -36 \\ 8 & 21 & -46 \\ 5 & 12 & -27 \end{pmatrix}$.

1120. $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$. **1121.** $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$.

1122. Demostrar que si el último factor invariante $E_n(\lambda)$ de la matriz característica $A - \lambda E$ para la matriz A de orden n tiene el grado n, todos los elementos diagonales de diferentes células de la forma de Jordan de la matriz A son distintos entre sí.

1123. Demostrar que la matriz A es nilpotente (o sea, $A^k = 0$ para cierto k natural) cuando, y sólo cuando, todos sus números característicos son nulos.

1124. Demostrar que una matriz nilpotente, distinta de cero, no se reduce a la forma diagonal mediante la transformación de semejanza.

1125. Hallar la forma de Jordan de una matriz idempotente A (es decir, una matriz que posee la propiedad de $A^2 = A$).

1126. Demostrar que la matriz involutiva A (o sea, una matriz que posee la propiedad de $A^2 = E$) es semejante a la matriz diagonal y hallar el aspecto de esa matriz diagonal.

1127. Demostrar que una matriz periódica A (o sea, una matriz que posee la propiedad de $A^k = E$ para cierto k natural) es semejante a una matriz diagonal y hallar el aspecto de esa matriz.

1128. Hallar el polinomio mínimo (la definición se da en el problema 830): a) de la matriz unidad, b) de la matriz nula.

1129. ¿Para qué matrices el polinomio mínimo tiene la forma de $\lambda - \alpha$, donde α es un número?

1130. Hallar el polinomio mínimo de la célula de Jordan de orden n en cuya diagonal está situado el número α.

1131. Demostrar que el polinomio mínimo de una matriz diagonal-celular es igual al mínimo divisor común de los polinomios mínimos de sus células diagonales.

1132. Demostrar que el polinomio mínimo de la matriz A es igual al último factor invariante $E_n(\lambda)$ de su matriz característica $A-\lambda E$.

1133. Demostrar que una potencia de un polinomio mínimo de la matriz A se divide por el polinomio característico de la misma matriz.

Hallar los polinomios mínimos de las siguientes matrices:

1134. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **1135.** $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$.

1136. Demostrar que para la semejanza de dos matrices es necesario (pero no es suficiente) que éstas tengan los polinomios mínimo y característico iguales. Citar un ejemplo de dos matrices no semejantes, cuyos polinomios mínimo $\psi(\lambda)$ y característico $\varphi(\lambda)$ son los mismos.

1137. Hallar la k-ésima potencia de la célula de Jordan

$$A=\begin{Vmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{Vmatrix} \quad \text{de orden } n.$$

1138*. Demostrar que el valor del polinomio $f(x)$ con respecto a la célula de Jordan A de orden n con el número α en la diagonal principal

$$A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

se determina mediante la fórmula

$$f(A)=\begin{Vmatrix} f(\alpha) & \frac{f'(\alpha)}{1!} & \frac{f''(\alpha)}{2!} & \frac{f'''(\alpha)}{3!} & \dots & \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\alpha) & \frac{f'(\alpha)}{1!} & \frac{f''(\alpha)}{2!} & \dots & \frac{f^{(n-2)}(\alpha)}{(n-2)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & f(\alpha) \end{Vmatrix}$$

1139. Resolver el problema 1080 usando la forma de Jordan de la matriz A.

1140. Hallar la forma de Jordan del cuadrado de la célula de Jordan, en cuya diagonal se encuentra el número $\alpha \neq 0$.

1141*. Hallar la forma de Jordan del cuadrado de la célula de Jordan con cero en la diagonal principal (célula nilpotente de Jordan).

1142. Sea X_j la forma de Jordan de la matriz X. Demostrar que $(A + \alpha E)_j = A_j + \alpha E$, donde A es cualquier matriz cuadrada y α, un número.

1143*. Hallar la forma de Jordan de la matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{de orden } n \geqslant 3.$$

1144*. Demostrar que cualquier matriz cuadrada puede representarse en forma de un producto de dos matrices simétricas, una de las cuales es regular.

1145*. Conociendo los números característicos de la matriz A, hallar los números característicos de la p-ésima matriz A_p asociada a A (la definición se da en el problema 969).

1146*. Conociendo los números característicos de dos matrices cuadradas —A de orden p y B de orden q—, hallar los números característicos de su producto de Kronecker $A \times B$ (la definición se da en el problema 963).

1147*. Sea $\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}$ un polinomio mínimo de la matriz A de grado $r = r_1 + r_2 + \dots + r_s$. Aquí r_k es la multiplicidad de λ_k como de la raíz del polinomio mínimo $\psi(\lambda)$.

Si para la función $f(\lambda)$ existen los números

$$f(\lambda_k),\ f'(\lambda_k),\ f''(\lambda_k),\ \dots,\ f^{(r_k-1)}(\lambda_k) \qquad (1)$$
$$(k = 1, 2, \dots, s),$$

se dice que la función $f(\lambda)$ *está determinada en el espectro de la matriz* A y el sistema de números (1) se denomina *sistema de valores de la función* $f(\lambda)$ *en dicho espectro de la matriz* A. Demostrar que los valores de los polinomios $g(\lambda)$ y $h(\lambda)$ con respecto a la matriz A coinciden, es decir, $g(A) = h(A)$, cuando, y sólo cuando, coinciden los valores de esos polinomios en el espectro de la matriz A.

1148. Supongamos que la función $f(\lambda)$ está determinada en el espectro de la matriz A (en el sentido del problema anterior). Demostrar que si existe por lo menos un polinomio, cuyo valor en el espectro de la matriz A coincide con los valores de $f(\lambda)$, entonces habrá una cantidad infinita de semejantes polinomios y entre ellos existe uno, y sólo uno, que tiene el grado inferior al del polinomio mínimo de la matriz A. Este polinomio $r(\lambda)$ se llama *polinomio de interpolación de Lagrange—Sylvester* de la función $f(\lambda)$ en el espectro de la matriz A. Su valor con respecto a A se toma, según la definición, como el valor de la función $f(\lambda)$ con respecto a esa matriz: $f(A) = r(A)$.

1149. Demostrar que si la función $f(\lambda)$ está determinada en el espectro de la matriz A y el polinomio característico $|A - \lambda E|$ no tiene raíces múltiples, el polinomio de interpolación de Lagrange—Sylvester $r(\lambda)$ existe y en este caso la matriz $f(A)$ tiene sentido. Hallar el aspecto de $r(\lambda)$ y $f(A)$.

1150. Demostrar que si la función $f(\lambda)$ está determinada en el espectro de la matriz A y el polinomio mínimo de esta matriz $\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_s)$ no tiene raíces múltiples, el polinomio de interpolación de Lagrange—Sylvester $r(\lambda)$ existe y la matriz $f(A)$ tiene sentido. Hallar la expresión para calcular $f(A)$.

1151*. Demostrar que si la función $f(\lambda)$ está determinada en el espectro de la matriz A, la definición de la matriz $f(A)$ (se ha dado en el problema 1148) tiene sentido, o sea, existe el polinomio de interpolación de Lagrange—Sylvester $r(\lambda)$. Sean $\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}$ un polinomio mínimo de la matriz A, donde las raíces $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ se difieren entre sí, y

$$\psi_k(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{r_k}} \quad (k = 1, 2, \dots, s).$$

Mostrar que

$$r(\lambda) = \sum_{k=1}^{s} [\alpha_{k,1} + \alpha_{k,2}(\lambda - \lambda_k) + \dots + \alpha_{k,r_k} \times (\lambda - \lambda_k)^{r_k - 1}] \cdot \psi_k(\lambda), \qquad (1)$$

donde los números $\alpha_{k,j}$ se determinan de las igualdades

$$\alpha_{k,j} = \frac{1}{(j-1)!} \left[\frac{f(\lambda)}{\psi_k(\lambda)} \right]^{(j-1)}_{\lambda = \lambda_k} \qquad (2)$$
$$(j = 1, 2, \dots, r_k;\ k = 1, 2, \dots, s),$$

es decir, la expresión en corchetes de la igualdad (1) es igual a la suma de los primeros r_k términos del desarrollo en la serie de Taylor según las potencias de la resta de $\lambda - \lambda_k$ para la función $\frac{f(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}$.

1152. Sean $\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2 (\lambda - \lambda_2)^3$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ un polinomio mínimo de la matriz A y $f(\lambda)$ una función determinada en el espectro de esa matriz. Escribir la expresión para la matriz $f(A)$, aplicando el precedente problema.

1153. Demostrar que si las matrices A y B son semejantes con la particularidad de que $B = T^{-1}AT$ y para la función $f(\lambda)$ la matriz $f(A)$ existe, entonces también existe la matriz $f(B)$ y es semejante a $f(A)$, además, $f(B) = T^{-1}f(A)T$ con la misma matriz T.

1154*. Demostrar que si la matriz A es diagonal-celular

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_s \end{pmatrix}$$

y la función $f(\lambda)$ está determinada en el espectro de la matriz A, entonces

$$f(A)=\begin{pmatrix} f(A_1) & & & 0 \\ & f(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f(A_s) \end{pmatrix}.$$

1155. Hallar el polinomio de interpolación de Lagrange—Sylvester $r(\lambda)$ y el valor de $f(A)$ de la función $f(\lambda)$ para la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

¿Para qué funciones $f(\lambda)$ el valor de $f(A)$ tiene sentido?

1156. Resolver el problema, análogo al antecedente, para la matriz

$$A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

1157. Mostrar que si la matriz A es semejante a la diagonal

$$A=T^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}T$$

y para la función $f(\lambda)$ la matriz $f(A)$ existe, entonces $f(A)$ también es semejante a la matriz diagonal con la particularidad de que

$$f(A)=T^{-1}\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & 0 \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}T$$

con la misma matriz T.

1158. Demostrar que si $f(\lambda)=g(\lambda)+h(\lambda)$ y las matrices $g(A)$ y $h(A)$ existen, la matriz $f(A)$ también existe, además, $f(A)=g(A)+h(A)$.

1159. Demostrar que si $f(\lambda)=g(\lambda)\,h(\lambda)$ y las matrices $g(A)$ y $h(A)$ existen, la matriz $f(A)$ también existe, con la particularidad de que $f(A)=g(A)\,h(A)$.

1160*. Mostrar que la función $f(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda}$ está determinada para todas las matrices regulares A y sólo para ellas, además, $f(A)=A^{-1}$.

1161. Demostrar que si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son números característicos de la matriz A y la función $f(\lambda)$ tiene sentido para $\lambda = A$, entonces $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$ serán números característicos de la matriz $f(A)$.

Calcular los siguientes valores de las funciones con respecto a las matrices, utilizando el polinomio de interpolación de Lagrange—Sylvester y los problemas 1148—1152 ó hallando la matriz que da la transformación de semejanza de la matriz dada en su forma de Jordan y haciendo uso de los problemas 1154, 1156 y 1153:

1162: A^{100} donde $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

1163. A^{50} donde $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1164. $\sqrt{A}$ donde $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

1165. $\sqrt{A}$ donde $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

1166. e^A donde $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$.

1167. e^A donde $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1168. e^A donde $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$.

1169. $\ln A$ donde $A=\begin{pmatrix} 4 & -15 & 6 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

1170. $\operatorname{sen} A$ donde $A=\begin{pmatrix} \pi-1 & 1 \\ -1 & \pi+1 \end{pmatrix}$.

1171*. Demostrar que la igualdad $\operatorname{sen} 2A = 2 \operatorname{sen} A \cos A$ es válida para cualquier matriz cuadrada A.

1172*. Demostrar que la matriz e^A existe y es regular para cualquier matriz cuadrada A.

1173. Hallar el determinante de la matriz e^A, donde A es una matriz cuadrada de orden n.

1174*. Supongamos que la función $f(\lambda)$ tiene sentido para $\lambda = A$. Demostrar que el determinante de la matriz $f(A)$ satisface la igualdad $|f(A)| = f(\lambda_1) f(\lambda_2) \ldots f(\lambda_n)$, donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son números característicos de la matriz A (teniendo en cuenta su multiplicidad).

§ 15. Formas cuadráticas [1]

En este párrafo, además de los problemas sobre formas cuadráticas, se dan problemas de las propiedades de las matrices ortogonales y simétricas, relacionadas con la teoría de las formas cuadráticas. Aquí se utiliza la siguiente terminología: como *transformación lineal* se entiende la transformación de las *incóg-*

[1]) Los problemas de las funciones cuadráticas y bilineales se dan en el § 24.

nitas tipo:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= q_{11}y_1 + q_{12}y_2 + \ldots + q_{1n}y_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1)\\
x_n &= q_{n1}y_1 + q_{n2}y_2 + \ldots + q_{nn}y_n.
\end{aligned}
$$

La matriz

$$
Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (2)
$$

formada de los coeficientes de la transformación (1) en el orden correspondiente, se denomina matriz de dicha transformación. La transformación lineal se llama *regular* si su matriz es regular. Dos formas cuadráticas se denominan *equivalentes* si una de ellas pasa a la otra mediante la transformación lineal regular. Se llama forma *canónica* de la forma cuadrada dada la equivalente con ella, que no contiene productos de incógnitas, y forma *normal*, la forma canónica en la cual los coeficientes de las incógnitas elevadas al cuadrado (sin contar las nulas) son iguales a ± 1 para el campo real y $+1$ para el campo complejo.

Hallar en el campo de números reales la forma normal de las siguientes formas cuadráticas:

1175. $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

1176. $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.

1177. $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

1178. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$.

1179. $x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$.

Hallar la forma normal y la transformación lineal regular que conduce a dicha forma, para las siguientes formas cuadráticas (a causa de que la transformación lineal buscada es no unívoca, la respuesta puede diferenciarse de la citada más abajo):

1180. $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$.

1181. $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

1182. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

1183. $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$.

1184. $-12x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_3^2 + 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3$.

1185. $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$.

1186. $3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4$.

Reducir las siguientes formas cuadráticas a la forma canónica con coeficientes enteros mediante la transformación lineal regular con coeficientes racionales y hallar la expresión para nuevas incógnitas a través de las anteriores:

1187. $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

1188. $3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3$.

1189. ${}^{17}/_{2}x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_4^2 - x_1x_2 + x_2x_3 - x_3x_4$.

Para las siguientes formas cuadráticas hallar la transformación lineal regular que convierte la forma f en la g (la transformación buscada no se define unívocamente):

1190. $f = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$;
$g = 2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2 - 4y_1y_2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3$.

1191. $f = 3x_1^2 + 10x_2^2 + 25x_3^2 - 12x_1x_2 - 18x_1x_3 + 40x_2x_3$;
$g = 5y_1^2 + 6y_2^2 + 12y_1y_2$.

1192. $f = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3$;
$g = 4y_1^2 + y_2^2 + 9y_3^2 - 12y_1y_3$.

Reducir las siguientes formas cuadráticas a la forma canónica y hallar la expresión de nuevas incógnitas a través de las anteriores (la respuesta no es unívoca):

1193. $\sum_{i,j=1}^{n} a_ia_jx_ix_j$, donde no todos les números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son nulos.

1194. $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i<j}^{n} x_ix_j$. **1195*.** $\sum_{i<j}^{n} x_ix_j$. **1196.** $\sum_{i=1}^{n-1} x_ix_{i+1}$.

1197*. $\sum_{i=1}^{n} (x_i - s)^2$, donde $s = \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n}$.

1198*. $\sum_{i<j}^{n} |i-j| \cdot x_ix_j$.

1199*. Supongamos que se da la forma cuadrática

$$f = l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_p^2 - l_{p+1}^2 - l_{p+2}^2 - \ldots - l_{p+q}^2,$$

donde $l_1, l_2, \ldots, l_p, l_{p+1}, l_{p+2}, \ldots, l_{p+q}$ son formas lineales reales con respecto a $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Demostrar que el índice positivo de la inercia (o sea, el número de coeficientes positivos en la forma canónica) de la forma f no supera p y el índice de inercia negativo no supera q.

1200*. Demostrar que si de cada una de las dos formas f y g puede pasarse a la otra mediante alguna transformación lineal (no es obligatorio que sea regular), estas formas son equivalentes.

Aclarar cuáles de las siguientes formas son equivalentes entre sí en el campo de los números reales:

1201. $f_1 = x_1^2 - x_2x_3$; $f_2 = y_1y_2 - y_3^2$; $f_3 = z_1z_2 + z_3^2$.

1202. $f_1 = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3$;
$f_2 = y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 + 4y_1y_2 - 2y_1y_3 - 4y_2y_3$;
$f_3 = -4z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - 4z_1z_2 + 4z_1z_3 + 18z_2z_3$.

1203. Mostrar que todas las formas cuadráticas con respecto a n incógnitas pueden dividirse en clases de tal modo que dos formas serán equivalentes cuando, y sólo cuando, pertenezcan a una misma

clase. Hallar la cantidad de dichas clases en los campos real y complejo.

1204. ¿Qué valores del rango y la signatura caracterizan las clases de las formas cuadráticas reales equivalentes, para las cuales la forma f es equivalente a $-f$?

1205. En el campo de los números reales hallar el número de clases de equivalencia de las formas con respecto a n incógnitas que tienen la signatura dada s.

1206. Demostrar que para descomponer una forma cuadrática en el producto de dos formas lineales es necesario y suficiente el cumplimiento de las condiciones: a) en el campo de los números reales: el rango no supera a dos, y siendo el rango igual a dos, la signatura es igual a cero; b) en el campo de los números complejos: el rango no supera a dos.

1207. Demostrar que la forma cuadrática f es determinada positiva cuando, y sólo cuando, su matriz se representa en forma de $A = C'C$, donde C es una matriz real regular y C', la matriz traspuesta a C.

1208. Haciendo uso de los problemas 913, 951 y 1207, demostrar que una forma cuadrática es determinada positiva cuando, y sólo cuando, todos sus menores angulares son positivos. En calidad de menor angular de una forma cuadrática se comprende el menor de orden k que se encuentra en las primeras k filas y primeras k columnas de su matriz ($k = 1, 2, \ldots, n$; n es el orden de la matriz).

1209. Demostrar que en una forma determinada positiva todos los coeficientes de las incógnitas elevadas al cuadrado son positivos, pero que esta condición no es suficiente para que la forma sea determinada positiva.

1210*. Demostrar las afirmaciones:

a) Para que la forma cuadrática f sea determinada positiva es necesario y suficiente que no sólo los menores angulares (véase el problema 1208), sino todos los principales de su matriz sean positivos.

b) Para que una forma cuadrática f sea no negativa (o sea, $f \geqslant 0$ para cualesquiera valores reales de las incógnitas), es necesario y suficiente que todos los menores principales de su matriz sean no negativos. Mostrar en ejemplos que (a diferencia de las formas determinadas positivas) para que f sea no negativa, no es suficiente que todos los menores angulares sean no negativos.

c) Para que la matriz simétrica real A se represente en forma de $A = C'C$, donde C es una matriz regular real, es necesario y suficiente que todos los menores angulares de la matriz A sean positivos.

d) Para que la matriz simétrica real A se represente en forma de $A = C'C$, donde C es una matriz cuadrada real, es necesario y suficiente que todos los menores principales de la matriz A sean no negativos. Además, si el rango de A es r, el rango de C también es r, y las primeras r filas de C pueden considerarse linealmente independientes y las demás, nulas.

1211. Demostrar que la forma cuadrática f es determinada negati-

va (es decir, $f < 0$ para cualesquiera valores reales de las incógnitas, de las cuales no todas son iguales a cero) cuando, y sólo cuando, los signos de los menores angulares $D_1, D_2, \ldots, D_n$ se alternan con la particularidad de que $D_1 < 0$. Aquí D_k es el menor angular de orden k ($k = 1, 2, \ldots, n$).

Hallar todos los valores del parámetro λ, para los cuales las siguientes formas cuadráticas son determinadas positivas:

1212. $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

1213. $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$.

1214. $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

1215. $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$.

1216. $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.

1217*. Se denomina *discriminante D_f de una forma cuadrática f* el determinante de su matriz. Demostrar que si a una forma cuadrática determinada positiva $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se le añade el cuadrado de una forma lineal no nula de las mismas incógnitas, el discriminante de la forma aumenta.

1218*. Sean $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ una forma cuadrática determinada positiva y $\varphi(x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(0, x_2, \ldots, x_n)$. Demostrar que para los discriminantes de estas formas se cumple la desigualdad $D_f \leqslant a_{11}D_\varphi$.

1219*. Demostrar que si la forma cuadrática no negativa se convierte en cero por lo menos para un conjunto no nulo de valores reales de las incógnitas, esta forma es degenerada (o sea, su discriminante es igual a cero).

1220*. Denominaremos *composición de dos formas cuadráticas*

$$f = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \quad \text{y} \quad g = \sum_{i,\, j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j$$

la forma cuadrática $(f, g) = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}x_ix_j$.

Demostrar que:

a) si las formas y y g son no negativas, la forma (f, g) también es no negativa;

b) si las formas f y g son determinadas positivas, la forma (f, g) también es determinada positiva.

1221*. Se denomina transformación triangular la transformación lineal tipo

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n, \\ y_2 &= x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= x_n. \end{aligned}$$

Demostrar que:

a) la transformación triangular es regular y la transformación inversa de la triangular, es de nuevo triangular;

b) los menores angulares D_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) (véase el problema 1208) de la forma cuadrática $f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ para la transformación triangular no cambian.

1222*. Demostrar que:

a) para que la forma cuadrática de rango r $f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ se pueda, mediante una transformación triangular, reducir a la forma de

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2, \tag{1}$$

donde $\lambda_k \neq 0$ ($k = 1, 2, \ldots, r$), es necesario y suficiente que

$$D_k \neq 0 \ (k \leqslant r), \quad D_k = 0 \ (k > r), \tag{2}$$

donde D_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) son los menores angulares de la forma f (véase el problema 1208);

b) la forma canónica indicada (1) está determinada unívocamente, con la particularidad de que sus coeficientes se hallan según las fórmulas

$$\lambda_k = \frac{D_k}{D_{k-1}} \quad (k = 1, 2, \ldots, r; \ D_0 = 1) \tag{3}$$

(teorema de Sylvester).

1223. Supongamos que los menores angulares de la forma cuadrática f de rango r satisfacen las condiciones (2) del problema anterior. Demostrar que el índice positivo de inercia de dicha forma es igual al número de conservaciones del signo, y el índice negativo, al número de cambios del signo en la serie de números

$$1 = D_0, D_1, \ldots, D_r.$$

Comprobar que en los siguientes pares de formas cuadráticas una de ellas es determinada positiva; hallar la transformación lineal regular que convierte esa forma en la forma normal, y la otra forma del mismo par a la forma canónica, y escribir esta forma canónica (la transformación lineal no se determina unívocamente):

1224. $f = -4x_1x_2$,
$g = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2$.

1225. $f = x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_2$,
$g = x_1^2 + 56x_2^2 + 16x_1x_2$.

1226. $f = 8x_1^2 - 28x_2^2 + 14x_3^2 + 16x_1x_2 + 14x_1x_3 + 32x_2x_3$,
$g = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3$.

1227. $f = 2x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4$,
$g = {}^{17}/_4 x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_2x_4$.

1228. $f = x_1^2 + {}^{3}/_2 x_2^2 - 2x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$,
$g = x_1^2 + {}^{5}/_4 x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_2x_3$.

1229. $f = x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$,
$g = x_1^2 + 17x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 14x_2x_3$.

1230*. Supongamos que se da un par de formas f, g con respecto a las mismas incógnitas, con la particularidad de que $g > 0$. Demostrar que la forma canónica

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2,$$

que se obtiene para la forma f con cualquier transformación lineal que reduce la forma g a la forma normal (es decir, a la suma de cuadrados), se determina unívocamente con una precisión de hasta el orden de los sumandos, además sus coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son raíces de la denominada λ-ecuación del par de formas f, g, a saber: de la ecuación $|A - \lambda B| = 0$, donde A y B son las matrices de las formas f y g, respectivamente.

¿Se podrán reducir los siguientes pares de formas cuadráticas a la forma canónica mediante una transformación lineal regular real?

1231. $f = x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2$,
$g = x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2$.

1232. $f = x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$,
$g = x_1^2 - 2x_1x_2$.

1233. Supongamos que se dan dos formas determinadas positivas f y g, y que una transformación lineal regular de las incógnitas reduce la forma f al aspecto $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$ y la forma g a la forma normal, y la segunda transformación, al contrario, reduce la forma f a la forma normal y g a la forma $\sum_{i=1}^{n} \mu_i z_i^2$. Hallar la relación entre los coeficientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ y $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

Sin buscar la transformación lineal, hallar la forma canónica de dicha forma f a la que se reduce ésta, mediante la transformación que reduce, al mismo tiempo, la forma g dada ($g > 0$) a la forma normal:

1234. $f = 21x_1^2 - 18x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 + 28x_1x_3 + 6x_2x_3$,
$g = 11x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 - 12x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3$.

1235. $f = 14x_1^2 - 4x_2^2 + 17x_3^2 + 8x_1x_2 - 40x_1x_3 - 26x_2x_3$.
$g = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3$.

1236. Demostrar que dos pares de formas f_1, g_1 y f_2, g_2, donde g_1 y g_2 están determinadas positivas, son equivalentes (o sea, existe una transformación lineal regular que reduce f_1 a f_2 y g_1 a g_2) cuando, y sólo cuando las raíces de sus λ-ecuaciones $|A_1 - \lambda B_1| = 0$ y $|A_2 - \lambda B_2| = 0$ coinciden.

Sin buscar la transformación lineal de un par en otro, aclarar si son equivalentes los siguientes pares de formas:

1237. $f_1 = 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$,
$g_1 = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3$,
$f_2 = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$,
$g_2 = x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$.

1238. $f_1 = 4x_1^2 + 6x_2^2 + 21x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 22x_2x_3,$
$g_1 = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3,$
$f_2 = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 - 6x_1x_2 - 6x_1x_3 + 12x_2x_3,$
$g_2 = 9x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 6x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$

Hallar la transformación lineal regular que reduce un par de formas cuadráticas f_1, g_1 a otro par f_2, g_2 (la transformación buscada se determina no unívocamente):

1239. $f_1 = 2x_1^2 - 7x_2^2 + 2x_1x_2,$
$f_2 = -7y_1^2 - 3y_2^2 - 12y_1y_2,$
$g_1 = 2x_1^2 + 13x_2^2 + 10x_1x_2,$
$g_2 = 13y_1^2 + 25y_2^2 + 36y_1y_2.$

1240. $f_1 = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 10x_1x_2,$
$f_2 = -9y_1^2 - 20y_2^2 - 44y_1y_2,$
$g_1 = 2x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2,$
$g_2 = 29y_1^2 + 4y_2^2 + 20y_1y_2.$

1241. Supongamos que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son dos formas cuadráticas de las cuales por lo menos una es determinada positiva. Demostrar que las «superficies» $f = 1$ y $g = 1$ en un espacio n-dimensional no se intersecan (o sea, no tienen puntos comunes) cuando, y sólo cuando, la forma $f - g$ está determinada.

1242*. Demostrar que la forma canónica $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$, a que se reduce la forma cuadrática f mediante una transformación ortogonal, está determinada unívocamente con la particularidad de que sus coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son raíces de la ecuación característica $|A - \lambda E| = 0$ de la matriz A de la forma f.

Hallar la forma canónica a que se reducen las siguientes formas cuadráticas mediante una transformación ortogonal, sin buscar la misma transformación:

1243. $3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$

1244. $7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$

1245. $x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$

1246. $3x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3.$

1247*. $\sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1}.$

Hallar la transformación ortogonal que reduce las siguientes formas a la forma canónica (reducción a los ejes principales) y escribir esa forma canónica (la transformación no está definida unívocamente):

1248. $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3.$

1249. $11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3.$

1250. $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$

1251. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

1252. $17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$.

1253. $x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

1254. $8x_1^2 - 7x_2^2 + 8x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$.

1255. $2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$.

1256. $5x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2 - 10x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_1x_4 + 6x_2x_3 + 2x_2x_4 - 10x_3x_4$.

1257. $3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_3x_4 + x_4^2$.

1258. $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_3x_4 - 2x_4^2$.

1259. $9x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_3 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4$.

1260. $4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_4^2 + 12x_4x_5 + x_5^2$.

1261. $4x_1^2 - 4x_2^2 - 8x_2x_3 + 2x_3^2 - 5x_4^2 + 6x_4x_5 + 3x_5^2$.

1262. $3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_3x_4 - 4x_4^2 + 4x_5^2 + 4x_5x_6 + x_6^2$.

1263. $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i<j}^{n} x_ix_j$. 1264. $\sum_{i<j}^{n} x_ix_j$.

Hallar la forma canónica a que se reducen las siguientes formas mediante una transformación ortogonal y expresar las nuevas incógnitas a través de las anteriores (la transformación buscada no es unívoca):

1265*. Denominaremos dos formas cuadráticas *equivalentes ortogonalmente* si de una de ellas se puede pasar a la otra mediante una transformación ortogonal. Demostrar que para una equivalencia ortogonal de dos formas es necesario y suficiente que los polinomios característicos de sus matrices coincidan.

Aclarar cuáles de las siguientes formas cuadráticas son equivalentes ortogonalmente:

1266. $f = 9x_2^2 + 9x_3^2 + 12x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3$,

$g = -3y_1^2 + 6y_2^2 + 6y_3^2 - 12y_1y_2 + 12y_1y_3 + 6y_2y_3$,

$h = 11z_1^2 - 4z_2^2 + 11z_3^2 + 8z_1z_2 - 2z_1z_3 + 8z_2z_3$.

1267. $f = 7x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 16x_2x_3$,

$g = {}^2/_3y_1^2 - {}^{1}/_3y_2^2 - {}^{1}/_3y_3^2 - {}^4/_3y_1y_2 + {}^4/_3y_1y_3 + {}^8/_3y_2y_3$.

$h = z_2^2 - z_3^2 + 2\sqrt{2}z_1z_3$.

1268. Demostrar que cualquier matriz simétrica real A puede representarse en la forma: $A = Q^{-1}BQ$, donde Q es una matriz ortogonal y B, una matriz diagonal real.

Para las siguientes matrices hallar la ortogonal Q y la diagonal real B tales que la matriz dada se represente en forma de $Q^{-1}BQ$:

1269. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. 1270. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

1271*. Demostrar que todos los números característicos de una matriz simétrica real A yacen en el segmento $[a, b]$ cuando, y sólo cuando, la forma cuadrática con la matriz $A - \lambda_0E$ está determi-

nada positivamente para cualquier $\lambda_0 < a$ y determinada negativamente para cualquier $\lambda_0 > b$.

1272*. Sean A y B matrices simétricas reales. Demostrar que si los números característicos de la matriz A yacen en el segmento $[a, b]$ y los de la matriz B, en el segmento $[c, d]$, los números característicos de la matriz $A + B$ están en el segmento $[a + c, b + d]$.

1273. Demostrar que una forma cuadrática real y regular puede reducirse a la forma normal mediante una transformación ortogonal si, y sólo si, su matriz es ortogonal.

1274. Demostrar que una matriz de forma cuadrática determinada positiva es ortogonal cuando, y sólo cuando, esa forma es una suma de cuadrados. ¿De qué modo puede enunciarse esta tesis en el lenguaje de matrices?

1275*. Demostrar que cualquier matriz regular real A puede representarse como $A = QB$, donde Q es una matriz ortogonal y B una matriz triangular tipo

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

con elementos positivos en la diagonal principal, y esta representación es única.

1276*. Demostrar que:

a) cualquier matriz regular real A puede representarse tanto en forma de $A = Q_1B_1$, como $A = Q_2B_2$, donde las matrices Q_1 y Q_2 son ortogonales y reales y B_1 y B_2, simétricas reales y con menores angulares positivos. Cada una de dichas representaciones es única;

b) cualquier matriz regular compleja A puede representarse tanto en forma de $A = Q_1B_1$, como $A = B_2Q_2$, donde las matrices Q_1 y Q_2 son unitarias y B_1 y B_2, hermitianas con menores angulares positivos (la matriz B se denomina hermitiana si $\overline{B}' = B$). Cada una de esas representaciones es única;

c) sean A una matriz simétrica (o hermitiana) con menores angulares positivos y B una matriz ortogonal (unitaria correspondientemente). Demostrar que:

1) los productos AB y BA serán matrices simétricas (hermitianas) con menores angulares positivos cuando, y sólo cuando, B sea una matriz unidad;

2) los productos AB y BA serán ortogonales (unitarios), cuando, y sólo cuando, A sea una matriz unidad.

PARTE IV

ESPACIOS VECTORIALES Y SUS TRANSFORMACIONES LINEALES

§ 16. Espacios vectoriales afines

A continuación se usan las siguientes designaciones: los vectores se indican con minúsculas latinas de letra negrilla, y los espacios vectoriales, sus subespacios y las variedades lineales, con mayúsculas latinas de letra negrilla. Ordinariamente las coordenadas del vector se escriben en fila encerradas dentro del paréntesis, por ejemplo $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Los vectores de la base en forma matricial, se escriben en fila dentro del paréntesis y las coordenadas del vector, en columna dentro del paréntesis.

Se denomina *matriz del cambio* de la base inicial $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ por la nueva $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ la matriz $T = (t_{ij})_1^n$, en cuyas columnas se encuentran las coordenadas de los nuevos vectores básicos en la base inicial. Así, pues, las bases nueva e inicial están relacionadas por una igualdad matricial

$$(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)\cdot T. \tag{1}$$

Para esas designaciones las coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ del vector $\mathbf{x}$ en la base inicial se relacionan con las coordenadas $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ del mismo vector en la nueva base mediante las igualdades $x_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}x'_j$, o escribiendo en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Se denomina *subespacio lineal* de un espacio vectorial $\mathbf{R}$ un conjunto no vacío (o sea, que contiene por lo menos un vector) $\mathbf{L}$ de vectores de $\mathbf{R}$ que posee las siguientes propiedades:

1) la suma $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ de cualesquiera dos vectores de $\mathbf{L}$ pertenece de nuevo a $\mathbf{L}$;

2) el producto $\alpha\cdot\mathbf{x}$ de cualquier vector $\mathbf{x}$ de $\mathbf{L}$ por cualquier número α pertenece de nuevo a $\mathbf{L}$.

Se denomina *variedad lineal* del espacio vectorial $\mathbf{R}$ el conjunto de $\mathbf{P}$ vectores de $\mathbf{R}$, obtenido añadiendo un mismo vector $\mathbf{x}_0$ a todos los vectores de cierto subespacio $\mathbf{L}$ de $\mathbf{R}$. Esta relación de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{L}$ se designará de la siguiente manera: $\mathbf{P} = \mathbf{L} + \mathbf{x}_0$ ó $\mathbf{L} = \mathbf{P} - \mathbf{x}_0$. Diremos que la variedad lineal $\mathbf{P}$ está obtenida de un subespacio lineal $\mathbf{L}$ por medio del desplazamiento paralelo en el vector $\mathbf{x}_0$.

Se denomina *dimensión* de una variedad lineal la dimensión del subespacio lineal, desplazando paralelamente al cual se obtuvo la variedad dada. El hecho de que dicha definición es correcta se desprende de la afirmación del problema 1331. Las variedades lineales unidimensionales se llamarán rectas, y las bidimensionales, planos.

Se denomina *suma* de dos subespacios lineales L_1 y L_2 del espacio R un conjunto $S = L_1 + L_2$ de todos los vectores pertenecientes a R, cada uno de los cuales se representa como $x = x_1 + x_2$, donde $x_1 \in L_1$ y $x_2 \in L_2$. Aquí la notación $a \in A$ significa: «el elemento a pertenece al conjunto A». Se llama *intersección* de dos subespacios lineales L_1 y L_2 del espacio vectorial R el conjunto $D = L_1 \cap L_2$ de todos los vectores de R, cada uno de los cuales pertenece tanto a L_1, como a L_2.

Se denomina *suma directa* de dos subespacios lineales L_1 y L_2 del espacio vectorial R la suma de estos subespacios a condición de que su intersección consiste sólo del vector nulo, es decir, $L_1 \cap L_2 = 0$. En caso de la suma directa escribiremos $S = L_1 \dot{+} L_2$.

El espacio vectorial n-dimensional se indicará con la notación R_n. Si no se dice de antemano lo contrario, se considera que a título de campo principal se toma el campo de los números reales, o sea, R_n consiste de todos los vectores n-dimensionales con cualesquiera coordenadas reales.

Los vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n$ y x vienen dados por sus coordenadas en cierta base. Mostrar que los vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n$ forman de por sí una base y hallar las coordenadas del vector x en esta base:

1277. $e_1 = (1, 1, 1), e_2 = (1, 1, 2), e_3 = (1, 2, 3); x = (6, 9, 14)$.

1278. $e_1 = (2, 1, -3), e_2 = (3, 2, -5), e_3 = (1, -1, 1)$; $x = (6, 2, -7)$.

1279. $e_1 = (1, 2, -1, -2), e_2 = (2, 3, 0, -1), e_3 = (1, 2, 1, 4)$, $e_4 = (1, 3, -1, 0); x = (7, 14, -1, 2)$.

Demostrar que cada uno de los dos sistemas de vectores es base y hallar la relación entre las coordenadas del mismo vector en estas dos bases:

1280. $e_1 = (1, 2, 1), e_2 = (2, 3, 3), e_3 = (3, 7, 1); e_1' = (3, 1, 4)$, $e_2' = (5, 2, 1), e_3' = (1, 1, -6)$.

1281. $e_1 = (1, 1, 1, 1), e_2 = (1, 2, 1, 1), e_3 = (1, 1, 2, 1)$, $e_4 = (1, 3, 2, 3); e_1' = (1, 0, 3, 3), e_2' = (-2, -3, -5, -4)$, $e_3' = (2, 2, 5, 4), e_4' = (-2, -3, -4, -4)$.

1282. Hallar las coordenadas del polinomio

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

a) en la base $1, x, x^2, \ldots, x^n$;

b) en la base $1, x - \alpha, (x - \alpha)^2, \ldots, (x - \alpha)^n$, aclarando que los últimos polinomios forman en realidad una base.

1283. Hallar la matriz del cambio de la base $1, x, x^2, \ldots, x^n$ por la base $1, x - \alpha, (x - \alpha)^2, \ldots, (x - \alpha)^n$ del espacio de los polinomios de grado inferior o igual a n.

1284. ¿De qué modo variará la matriz del cambio de una base por otra si:

a) se cambian de sitio dos vectores de la primera base?

b) se cambian de sitio dos vectores de la segunda base?

c) se escriben los vectores de ambas bases en orden inverso?

¿Será un subespacio lineal del correspondiente espacio vectorial cada uno de los conjuntos de los vectores mencionados en los siguientes problemas?

1285. Todos los vectores del espacio vectorial n-dimensional, cuyas coordenadas son números enteros.

1286. Todos los vectores del plano, cada uno de los cuales yace en uno de los ejes de coordenadas Ox y Oy.

1287. Todos los vectores del plano, cuyos extremos yacen en una recta dada (si no se dice de antemano lo contrario, el origen de cualquier vector se supone coincidente con el origen de las coordenadas).

1288. Todos los vectores del plano, cuyos orígenes y extremos yacen en la recta dada.

1289. Todos los vectores de un espacio tridimensional, cuyos extremos no están en la recta dada.

1290. Todos los vectores del plano, cuyos extremos yacen en el primer cuadrante del sistema de coordenadas.

1291. Todos los vectores de R_n, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$.

1292. Todos los vectores de R_n, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$.

1293. Todos los vectores que son combinaciones lineales de vectores dados: $x_1, x_2, \ldots, x_k$ de R_n.

1294. Enumerar todos los subespacios lineales de un espacio vectorial tridimensional.

1295. Supongamos que el subespacio lineal L_2 contiene el subespacio lineal L_1. Demostrar que la dimensión de L_1 no supera a la de L_2, con la particularidad de que las dimensiones son iguales entre sí cuando, y sólo cuando, $L_1 = L_2$. ¿Es válida la última afirmación para cualesquiera dos subespacios lineales del espacio dado?

1296. Demostrar que si la suma de las dimensiones de dos subespacios lineales del espacio n-dimensional supera a n, dichos subespacios poseen un vector no nulo común.

Demostrar que los siguientes sistemas de vectores forman subespacios lineales y hallar su base y dimensión:

1297. Todos los vectores n-dimensionales, que tienen iguales la primera coordenada y la última.

1298. Todos los vectores n-dimensionales, cuyas coordenadas con números pares son nulas.

1299. Todos los vectores n-dimensionales, cuyas coordenadas con números pares son iguales entre sí.

1300. Todos los vectores n-dimensionales tipo $(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \alpha, \beta, \ldots)$ donde α y β son cualesquiera números.

1301. Demostrar que todas las matrices cuadradas de orden n con elementos reales (o elementos de cualquier campo P) forman un espacio vectorial sobre el campo de los números reales (correspondientemente, sobre el campo P), si en calidad de operaciones se toman la adición de las matrices y la multiplicación de la matriz por un número. Hallar la base y la dimensión de ese espacio.

1302. Demostrar que todos los polinomios de grado $\leqslant n$ con una

variable que posee coeficientes reales (o coeficientes de cualquier campo P) forman un espacio vectorial si a título de operaciones se toman las operaciones corrientes de adición de los polinomios y multiplicación del polinomio por un número. Hallar la base y dimensión de dicho espacio.

1303. Demostrar que todas las matrices simétricas forman un subespacio lineal del espacio de todas las matrices cuadradas de orden n. Hallar la base y dimensión de dicho subespacio.

1304. Demostrar que las matrices antisimétricas forman un subespacio lineal del espacio de todas las matrices cuadradas de orden n. Hallar la base y dimensión de dicho subespacio.

1305. Demostrar que si el subespacio lineal L del espacio de polinomios de grado $\leqslant n$ contiene por lo menos un polinomio de grado k para $k = 0, 1, 2, \ldots, p$, pero no contiene polinomios de grado $k > p$, entonces L coincide con el subespacio L_p de todos los polinomios de grado $\leqslant p$.

1306. Sea f una forma cuadrática no negativa con respecto a n incógnitas de rango r. Demostrar que todas las soluciones de la ecuación $f = 0$ forman un subespacio lineal $(n - r)$-dimensional del espacio R_n.

1307. Demostrar que las soluciones de cualquier sistema de ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas de rango r forman un subespacio lineal de dimensión $d = n - r$ del espacio n-dimensional R_n, y viceversa, para cualquier subespacio lineal L de dimensión d del espacio R_n existe un sistema de ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas de rango $r = n - d$, cuyas soluciones ocupan precisamente el subespacio L dado.

1308. Hallar alguna base y la dimensión de un subespacio lineal L del espacio R_n si L está dado mediante la ecuación $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$.

1309. Demostrar que la dimensión del subespacio lineal L tendido sobre los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_k$ (es decir, un subespacio de todas las combinaciones lineales de dichos vectores), es igual al rango de la matriz, compuesta de las coordenadas de los vectores dados en alguna base, mientras que en calidad de base del subespacio L puede tomarse cualquier subsistema máximo linealmente independiente del sistema de dichos vectores.

Hallar la dimensión y base de los subespacios lineales, tendido sobre los siguientes sistemas de vectores:

1310. $a_1 = (1, 0, 0, -1)$, $a_2 = (2, 1, 1, 0)$, $a_3 = (1, 1, 1, 1)$, $a_4 = (1, 2, 3, 4)$, $a_5 = (0, 1, 2, 3)$.

1311. $a_1 = (1, 1, 1, 1, 0)$, $a_2 = (1, 1, -1, -1, -1)$, $a_3 = (2, 2, 0, 0, -1)$, $a_4 = (1, 1, 5, 5, 2)$, $a_5 = (1, -1, -1, 0, 0)$.

Hallar los sistemas de ecuaciones lineales que prefijan los subespacios lineales, tendidos sobre los siguientes sistemas de vectores:

1312. $a_1 = (1, -1, 1, 0)$, $a_2 = (1, 1, 0, 1)$, $a_3 = (2, 0, 1, 1)$.

1313. $a_1 = (1, -1, 1, -1, 1)$, $a_2 = (1, 1, 0, 0, 3)$, $a_3 = (3, 1, 1, -1, 7)$, $a_4 = (0, 2, -1, 1, 2)$.

1314. Demostrar que la suma y la intersección de dos subespacios lineales del espacio R_n son de por sí subespacios lineales del mismo espacio.

1315. Demostrar que la suma $S = L_1 + L_2$ de dos subespacios lineales del espacio R_n es igual a la intersección de todos los subespacios lineales de R_n que contienen tanto L_1, como también L_2.

1316. Demostrar que la suma de las dimensiones de dos subespacios lineales del espacio R_n es igual a la dimensión de la suma más la dimensión de la intersección de estos subespacios.

Hallar la dimensión s de la suma y la dimensión d de la intersección de los subespacios lineales: L_1 tendido sobre los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_k$ y L_2, tendido sobre los vectores $b_1, b_2, \ldots, b_l$:

1317. $a_1 = (1, 2, 0, 1), a_2 = (1, 1, 1, 0); b_1 = (1, 0, 1, 0), b_2 = (1, 3, 0, 1)$.

1318. $a_1 = (1, 1, 1, 1), a_2 = (1, -1, 1, -1), a_3 = (1, 3, 1, 3); b_1 = (1, 2, 0, 2), b_2 = (1, 2, 1, 2), b_3 = (3, 1, 3, 1)$.

1319*. Sean L_1 un subespacio lineal del espacio R_n con una base $a_1, a_2, \ldots, a_k$ y L_2 un subespacio lineal del mismo espacio con la base $b_1, b_2, \ldots, b_l$.

Demostrar las siguientes reglas de construcción de la base de la suma $S = L_1 + L_2$ y la base de la intersección $D = L_1 \cap L_2$:

1) Como base de la suma S sirve el subsistema máximo linealmente independiente del sistema de vectores $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l$. Su construcción se reduce al cálculo del rango de la matriz formada de las coordenadas de ese último sistema de vectores.

2) La base de la suma S puede obtenerse, añadiendo a los vectores linealmente independientes $a_1, \ldots, a_k$ algunos de los vectores $b_1, \ldots, b_l$ (problema 659). Cambiando (si es necesario) el orden de los últimos vectores, puede considerarse que los vectores $a_1, \ldots, a_k$, $b_1, \ldots, b_{s-k}$ forman la base S.

La igualdad

$$x_1a_1 + \ldots + x_ka_k = y_1b_1 + \ldots + y_lb_l \qquad (1)$$

es equivalente al sistema de n ecuaciones lineales homogéneas con $k + l$ incógnitas $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l$ de rango s. Ya que las primeras s columnas de la matriz del sistema son linealmente independientes y, por consecuencia, por lo menos un menor de orden s en esas columnas es distinto de cero, entonces en calidad de las incógnitas independientes pueden tomarse las últimas $k + l - s = d$ incógnitas $y_{s-k+1}, \ldots, y_l$. Por eso puede hallarse el sistema fundamental de soluciones

$$x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}, \quad y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{il} \quad (i = 1, 2, \ldots, d) \qquad (2)$$

para el sistema de ecuaciones (1) tal que

$$\begin{vmatrix} y_{1,\, s-k+1} & \cdots & y_{1,\, l} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ y_{d,\, s-k+1} & \cdots & y_{d,\, l} \end{vmatrix} \neq 0; \qquad (3)$$

entonces el sistema de vectores

$$c_i = \sum_{j=1}^{l} y_{ij} \boldsymbol{b}_j \quad (i = 1, 2, \ldots, d) \tag{4}$$

es la base de la intersección $\boldsymbol{D}$.

Observación. Como $d = k + l - s$, esto da la segunda solución del problema 1316.

Hallar las bases de la suma y la intersección de los subespacios lineales, tendidos sobre los sistemas de vectores $a_1, \ldots, a_k$ y $b_1, \ldots, b_l$:

1320. $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 3, 3)$; $\boldsymbol{b}_1 = (2, 3, -1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (1, 2, 2)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1, 1, -3)$.

1321. $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 1, -2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 3, 1, 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 2, 2, -3)$; $\boldsymbol{b}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (1, 0, 1, -1)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1, 3, 0, -4)$.

1322. $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 1, 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0, 0, 1, 1)$; $\boldsymbol{b}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\boldsymbol{b}_2 = (0, 2, 1, 1)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1, 2, 1, 2)$.

1323. Demostrar que si la dimensión de la suma de dos subespacios lineales del espacio $\boldsymbol{R}_n$ supera la dimensión de su intersección en una unidad, la suma coincide con uno de esos subespacios y la intersección con el otro.

1324. Sean $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{L}_1$ y $\boldsymbol{L}_2$ subespacios lineales del espacio $\boldsymbol{R}_n$. Demostrar que $\boldsymbol{L}$ será la suma directa de $\boldsymbol{L}_1$ y $\boldsymbol{L}_2$ cuando, y sólo cuando, se cumplan las condiciones:

a) $\boldsymbol{L}$ contiene $\boldsymbol{L}_1$ y $\boldsymbol{L}_2$;

b) cada vector $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$ se representa unívocamente en forma de $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$, donde $\boldsymbol{x}_1 \in \boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{L}_2$. En otras palabras, la suma $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2$ es suma directa si, y sólo si, para cualquier vector $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$ la representación $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ donde $\boldsymbol{x}_1 \in \boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{L}_2$ es unívoca.

1325. Demostrar que la suma $\boldsymbol{S}$ de los subespacios lineales $\boldsymbol{L}_1$ y $\boldsymbol{L}_2$ será suma directa cuando, y sólo cuando, por lo menos un vector $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$ se represente unívocamente como $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$, donde $\boldsymbol{x}_1 \in \boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{L}_2$.

1326. Supongamos que el subespacio lineal $\boldsymbol{L}$ es la suma directa de los subespacios lineales $\boldsymbol{L}_1$ y $\boldsymbol{L}_2$. Demostrar que la dimensión de $\boldsymbol{L}$ es igual a la suma de las dimensiones de $\boldsymbol{L}_1$ y $\boldsymbol{L}_2$ con la particularidad de que cualesquiera bases de $\boldsymbol{L}_1$ y $\boldsymbol{L}_2$ dan juntas la base de ê.

1327. Demostrar que para cualquier subespacio lineal $\boldsymbol{L}_1$ del espacio $\boldsymbol{R}_n$ puede hallarse otro subespacio $\boldsymbol{L}_2$, tal que todo el espacio $\boldsymbol{R}_n$ sea la suma directa de $\boldsymbol{L}_1$ y $\boldsymbol{L}_2$.

1328. Demostrar que el espacio $\boldsymbol{R}_n$ es la suma directa de dos subespacios lineales: $\boldsymbol{L}_1$, dado por la ecuación $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$, y $\boldsymbol{L}_2$, dado por un sistema de ecuaciones $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Hallar las proyecciones de los versores $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\boldsymbol{e}_n = (0, 0, 0, \ldots,$ sobre $\boldsymbol{L}_1$ paralelamente a $\boldsymbol{L}_2$ y sobre $\boldsymbol{L}_2$ paralelamente a $\boldsymbol{L}_1$.

1329. Demostrar que el espacio de todas las matrices cuadradas de orden n es la suma directa de los subespacios lineales L_1 de matrices simétricas y L_2 de matrices antisimétricas. Hallar las proyecciones de A_1 y A_2 de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

sobre L_1 paralelamente a L_2 y sobre L_2 paralelamente a L_1.

1330. Demostrar que las soluciones de cualquier sistema compatible de ecuaciones lineales con n incógnitas de rango r forman una variedad lineal del espacio R_n de dimensión $d = n - r$, y viceversa, para cualquier variedad lineal d-dimensional P del espacio R_n existe un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas de rango $r = n - d$, cuyas soluciones ocupan precisamente la variedad P dada.

1331. Supongamos que se dan dos variedades lineales (véase la introducción) $P_1 = L_1 + x_1$ y $P_2 = L_2 + x_2$, donde L_1, L_2 son subespacios lineales y x_1, x_2, vectores del espacio R_n. Demostrar que $P_1 = P_2$ cuando, y sólo cuando, $L_1 = L_2$ y $x_1 - x_2 \in L_1$. Así, pues, el espacio lineal, desplazando paralelamente el cual se obtiene dicha variedad, se determina unívocamente.

1332. Demostrar que si $P = L + x_0$, donde L es un subespacio lineal y x_0, un vector del espacio R_n, entonces el vector x_0 pertenece a la variedad P y después de sustituir este vector por cualquier vector $x \in P$ se obtiene la misma variedad P.

1333. Demostrar que si una recta tiene dos puntos comunes con la variedad lineal, ella está toda en esa variedad (en este caso el punto se identifica con el vector el cual tiene las mismas coordenadas que el punto, es decir, el cual va desde el origen de las coordenadas hacia el punto dado).

1334*. Demostrar que cualesquiera dos rectas del espacio R_n ($n \geqslant 3$) están en cierta variedad lineal tridimensional que yace en R_n.

1335. Hallar las condiciones necesarias y suficientes para que dos rectas $x = a_0 + a_1 t$ y $x = b_0 + b_1 t$ del espacio R_n ($n > 1$) se encuentren en un mismo plano.

1336. Hallar las condiciones necesarias y suficientes para que dos rectas $x = a_0 + a_1 t$ y $x = b_0 + b_1 t$ pasen por un mismo punto pero que no coincidan. Indicar el método de búsqueda del punto de intersección de esas rectas.

Hallar el punto de intersección de dos rectas $a_0 + a_1 t$ y $b_0 + b_1 t$:

1337. $a_0 = (2, 1, 1, 3, -3)$, $a_1 = (2, 3, 1, 1, -1)$; $b_0 = (1, 1, 2, 1, 2)$, $b_1 = (1, 2, 1, 0, 1)$.

1338. $a_0 = (3, 1, 2, 1, 3)$, $a_1 = (1, 0, 1, 1, 2)$; $b_0 = (2, 2, -1, -1, -2)$, $b_1 = (2, 1, 0, 1, 1)$.

1339. Hallar las condiciones necesarias y suficientes para que a través de un punto, dado por el vector c, pueda trazarse la única

recta que interseque dos rectas dadas $x = a_0 + a_1 t$ y $x = b_0 + b_1 t$. Indicar el método de construcción de semejante recta y los puntos de intersección de ella con las rectas dadas.

Hallar una recta que pasa a través de un punto, dado por el vector c y que interseca las rectas $x = a_0 + a_1 t$, $x = b_0 + b_1 t$ y buscar los puntos de intersección de la recta buscada con las dos rectas dadas:

1340. $a_0 = (1, 0, -2, 1)$, $a_1 = (1, 2, -1, -5)$; $b_0 = (0, 1, 1, -1)$, $b_1 = (2, 3, -2, -4)$; $c = (8, 9, -11, -15)$.

1341. $a_0 = (1, 1, 1, 1)$, $a_1 = (1, 2, 1, 0)$; $b_0 = (2, 2, 3, 1)$, $b_1 = (1, 0, 1, 3)$; $c = (4, 5, 2, 7)$.

1342. Demostrar que cualesquiera dos planos del espacio R_n están en la variedad lineal de dimensión $\leqslant 5$.

1343. Demostrar que dos variedades lineales del espacio R_n de dimensiones k y l, respectivamente, están en la variedad lineal de dimensión $\leqslant k + l + 1$.

1344. Demostrar que si dos variedades lineales — P de dimensión k y Q de dimensión l— del espacio R_n tienen un punto común con la particularidad de que $k + l > n$, su intersección es una variedad lineal de dimensión $\geqslant k + l - n$. ¿Qué teoremas se desprenden de aquí para los espacios tridimensional y cuadridimensional?

1345. Describir todos los casos de la disposición mutua de dos planos $x = a_0 + a_1 t_1 + a_2 t_2$ y $x = b_0 + b_1 t_1 + b_2 t_2$ en un espacio n-dimensional y señalar las condiciones necesarias y suficientes para cada uno de estos casos.

1346. Sean

$$a_0, a_1, \ldots, a_k \tag{1}$$

cualesquiera $k + 1$ vectores del espacio R_n. Demostrar que todos los vectores tipo

$$x = \alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k, \tag{2}$$

donde los números $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ satisfacen la condición

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1, \tag{3}$$

forman una variedad lineal P, cuya dimensión es igual al rango del sistema de vectores

$$a_1 - a_0, \ldots, a_k - a_0. \tag{4}$$

P es una variedad de dimensión mínima que contiene todos los vectores (1). El papel de a_0 lo puede desempeñar cualquiera de estos vectores. Viceversa, para cualquier variedad lineal k-dimensional P existe un sistema de $k + 1$ vectores (1), tal que P consta de todos los vectores tipo (2) a condición de (3), con la particularidad que el sistema de vectores (4) es linealmente independiente.

1347*. Se denomina *segmento con extremos en los puntos dados por los vectores a_1, a_2 del espacio R_n* el conjunto de todos los puntos, dados por los vectores tipo $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$, donde $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ y $0 \leqslant$

$\leqslant \alpha_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant \alpha_2 \leqslant 1$. El conjunto M de los puntos del espacio $\boldsymbol{R}_n$ se denomina *convexo* si para cualesquiera dos puntos de M todo el segmento con los extremos en dichos puntos está en M. Mostrar que la intersección de cualquier sistema de conjuntos convexos del espacio $\boldsymbol{R}_n$ es un conjunto convexo. Se llama *clausura convexa del conjunto dado A del espacio $\boldsymbol{R}_n$* la intersección de todos los conjuntos convexos de $\boldsymbol{R}_n$ que están en A. Demostrar que la clausura convexa de un sistema finito de puntos pertenecientes a $\boldsymbol{R}_n$, dados por los vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, consta de todos los puntos dados por los vectores tipo $\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k$, donde $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ y $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

1348*. Hallar la forma de un cuerpo en la sección de un paralelepípedo cuadridimensional (en caso del sistema cartesiano rectangular de coordenadas es un cubo cuadridimensional) $|x_i| \leqslant 1$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ por un hiperplano tridimensional con la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

1349*. Hallar la proyección de un tetraedro cuadridimensional, limitado por subespacios tridimensionales de coordenadas y el hiperplano $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$, sobre el subespacio $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ paralelamente a la recta $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

1350*. Demostrar que la diagonal de un paralelepípedo n-dimensional se divide en n partes iguales por los puntos de intersección de ésta con las variedades lineales $(n - 1)$-dimensionales, trazadas por todos los vértices del paralelepípedo paralelamente a la variedad lineal, trazada por los extremos de todas las n aristas, cuyo origen coincide con uno de los extremos de dicha diagonal.

§ 17. Espacios unitarios y euclídeos

Se denomina espacio *euclídeo* (*unitario* respectivamente) R_n un espacio vectorial n-dimensional sobre el campo de los números reales (complejos, correspondientemente), en el cual a cada par de vectores $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ les corresponde un número real (complejo, correspondientemente) (x, y) que se denomina producto escalar de estos vectores, con la particularidad de que se cumplen las condiciones:

a) en caso del espacio euclídeo:

$$(x, y) = (y, x), \tag{1}$$

$$(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y), \tag{2}$$

$$(\alpha x, y) = \alpha (x, y) \tag{3}$$

para cualquier número real α.

$$\text{Si } (x \neq 0, (x, x) > 0; \tag{4}$$

b) en caso del espacio unitario:

$$(x, y) = \overline{(y, x)}, \tag{1'}$$

$$(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y), \tag{2'}$$

lo que coincide con (2);

$$(\alpha x, y) = \alpha (x, y) \tag{3'}$$

para cualquier número complejo α.

$$\text{Si } x \neq 0, \ (x, x) > 0, \tag{4'}$$

lo que coincide con (4).

La base (o en general, un sistema de vectores) $e_1, e_2, \ldots, e_n$ se denomina *ortonormal* si

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Si no hay otras indicaciones, se considera que las coordenadas de todos los vectores se toman en una base ortonormal.

Los vectores x e y se denominan ortogonales si $(x, y) = 0$.

Se denomina *proceso de ortogonalización* del sistema de vectores $a_1, a_2, \ldots, a_s$ el paso de este sistema al nuevo $b_1, b_2, \ldots, b_s$, construido de la siguiente manera:

$$b_1 = a_1; \quad b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_i b_i \quad (k = 2, 3, \ldots, s),$$

dondo $c_i = \frac{(a_k, b_i)}{(b_i, b_i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$, si $b_i \neq 0$, y c_i es cualquier número si $b_i = 0$.

El valor de c_i se obtiene, multiplicando la igualdad que expresa b_k a través de a_k y b_i $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$, por b_i a condición de que $(b_k, b_i) = 0$.

1351. Demostrar que de las propiedades del producto escalar, señaladas en la introducción, se desprenden las siguientes propiedades:

a) $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$ para cualesquiera vectores del espacio euclídeo (unitario);

b) $(x, \alpha y) = \alpha (x, y)$ para cualesquiera vectores x, y del espacio euclídeo y cualquier número real α;

c) $(x, \alpha y) = \overline{\alpha} (x, y)$ para cualesquiera vectores x, y, del espacio unitario y cualquier número complejo α;

d) $(x_1 - x_2, y) = (x_1, y) - (x_2, y)$;

e) $(x, 0) = 0$.

1352. ¿Qué propiedades debe poseer la forma bilineal $g = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$ para que su valor con respecto a las coordenadas de cualesquiera dos vectores

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

de un espacio vectorial real R_n en cierta base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ pueda tomarse como producto escalar de estos dos vectores que define el espacio euclídeo n-dimensional? ¿A qué son iguales los productos escalares de los vectores de la base escogida?

1353. Supongamos que se da una forma bilineal hermitiana $g = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{y_j}$. La raya sobre la incógnita y_j significa que al sustituir y_j por su valor numérico α_j es necesario cambiar $\overline{y_j}$ por el valor complejo conjugado $\overline{\alpha_j}$. Supongamos que la matriz $A = (a_{ij})_1^n$ de

esta forma es hermitiana, o sea, $\overline{a_{ij}} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Mostrar que los valores de la correspondiente forma cuadrática hermitiana $f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i\overline{x_j}$ son reales para cualesquiera valores complejos de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y si la forma f es determinada positiva, o sea, $f > 0$ para cualesquiera valores complejos de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de los cuales no todos son nulos, entonces al definir el producto escalar mediante la igualdad $(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i\overline{y_j}$, donde $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_n$ son las coordenadas de los vectores x e y, respectivamente, en cierta base $e_1, \ldots, e_n$ de un espacio vectorial complejo R_n, dicho espacio se convierte en unitario con la particularidad de que cualquier espacio unitario puede obtenerse mediante este procedimiento.

1354. Demostrar que el producto escalar de cualesquiera dos vectores:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

del espacio euclídeo se expresa por la igualdad

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n,$$

cuando, y sólo cuando, la base de la cual se han tomado las coordenadas, es ortonormal.

1355. Sean L_1 y L_2 subespacios lineales de un espacio euclídeo (unitario) R_n con la particularidad de que la dimensión de L_1 es inferior a la de L_2; demostrar que en L_2 habrá un vector no nulo, ortogonal a todos los demás vectores de L_1.

1356. Demostrar que cualquier sistema de vectores no nulos ortogonales de dos en dos (por ejemplo, cualquier sistema ortonormal) es linealmente independiente.

Comprobar que los vectores de los siguientes sistemas son ortogonales de dos en dos y completarlos hasta las bases ortogonales:

1357. $(1, -2, 2, -3)$, $(2, -3, 2, 4)$.

1358. $(1, 1, 1, -2)$, $(1, 2, 3, -3)$.

Hallar los vectores que completan los siguientes sistemas de vectores hasta las bases ortonormales:

1359. $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

1360. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Aplicando el proceso de ortogonalización (véase la introducción), construir la base ortogonal del subespacio, tendido sobre el sistema de vectores dado:

1361. $(1, 2, 2, -1)$, $(1, 1, -5, 3)$, $(3, 2, 8, -7)$.

1362. $(1, 1, -1, -2)$, $(5, 8, -2, -3)$, $(3, 9, 3, 8)$.

1363. $\begin{matrix} (2, & 1, & 3, & -1), \\ (7, & 4, & 3, & -3), \\ (1, & 1, & -6, & 0), \\ (5, & 7, & 7, & 8). \end{matrix}$

1364. Se denomina *complemento ortogonal del subespacio L del espacio* R_n el conjunto L^* de todos los vectores de R_n, cada uno de los cuales es ortogonal a todos los vectores de L.

Demostrar que:

a) L^* es un subespacio lineal del espacio R_n;

b) la suma de las dimensiones de L y L^* es igual a n;

c) el espacio R_n es la suma directa de los subespacios L y L^*.

1365. Demostrar que el complemento ortogonal al subespacio lineal del espacio R_n posee las propiedades:

a) $(L^*)^* = L$; b) $(L_1 + L_2)^* = L_1^* \cap L_2^*$;

c) $(L_1 \cap L_2)^* = L_1^* + L_2^*$; d) $R_n^* = O$, $O^* = R_n$.

Aquí O es un subespacio nulo que contiene sólo el vector nulo $\mathbf{0}$.

1366. Hallar la base del complemento ortogonal L^* del subespacio L, tendido sobre los vectores:

$$a_1 = (1, 0, 2, 1), \; a_2 = (2, 1, 2, 3), \; a_3 = (0, 1, -2, 1).$$

1367. El subespacio lineal L se da mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 &= 0, \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Hallar las ecuaciones que determinan el complemento ortogonal L^*.

1368. Mostrar que la representación del subespacio lineal L del espacio R_n y de su complemento ortogonal L^* en una base ortonormal están relacionadas de la siguiente manera: los coeficientes del sistema linealmente independiente de ecuaciones lineales, que determina uno de esos subespacios, sirven de coordenadas de los vectores de la base del otro subespacio.

1369. Sea L un subespacio lineal del espacio R_n. Demostrar que cualquier vector x perteneciente a R_n se representa unívocamente como $x = y + z$, donde y pertenece a L y z es ortogonal a L. y se denomina proyección ortogonal del vector x sobre el subespacio L, y z es la componente ortogonal de x con respecto a L. Indicar el procedimiento para calcular y y z.

Hallar la proyección ortogonal y y la componente ortogonal z del vector x sobre el subespacio lineal L:

1370. $x = (4, -1, -3, 4)$. L está tendido sobre los vectores $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 2, 2, -1)$, $a_3 = (1, 0, 0, 3)$.

1371. $x = (5, 2, -2, 2)$. L está tendido sobre los vectores $a_1 = (2, 1, 1, -1)$, $a_2 = (1, 1, 3, 0)$, $a_3 = (1, 2, 8, 1)$.

1372. $x = (7, -4, -1, 2)$. L se determina mediante el sistema de ecuaciones

$$2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0,$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0,$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0.$$

1373*. Se denomina *distancia desde el punto, dado por el vector* x, *hasta la variedad lineal* $P = L + x_0$ el mínimo de las distancias desde el punto dado hasta los puntos de la variedad, es decir, el mínimo de longitudes de los vectores $x - u$, donde u es un vector de P.

Demostrar que esta distancia es igual a la longitud de la componente ortogonal z del vector $x - x_0$ con respecto al subespacio lineal L, desplazando paralelamente el cual se obtiene la variedad P.

1374. Hallar la distancia desde el punto, determinado por el vector x, hasta la variedad lineal que se da mediante el sistema de ecuaciones:

a) $x = (4, 2, -5, 1)$;
$2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9,$
$2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12.$

b) $x = (2, 4, -4, 2)$;
$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1,$
$x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 2.$

1375*. Demostrar que la distancia d desde el punto, determinado por el vector x, hasta la variedad lineal $P = L + x_0$, donde L es un subespacio lineal con la base $a_1, a_2, \ldots, a_k$, se calcula mediante el determinante de Gram (véase el problema 1415) según la fórmula

$$d^2 = \frac{G(a_1, a_2, \ldots, a_k, x - x_0)}{G(a_1, a_2, \ldots, a_k)}.$$

1376*. Se denomina distancia entre dos variedades lineales $P_1 = L_1 + x_1$ y $P_2 = L_2 + x_2$ el mínimo de las distancias de cualesquiera dos puntos, uno de los cuales pertenece a P_1 y el otro, a P_2. Demostrar que esta distancia es igual a la longitud de la componente ortogonal del vector $x_1 - x_2$ con respecto al subespacio lineal $L = L_1 + L_2$.

1377. Hallar la distancia entre dos planos $x = a_1t_1 + a_2t_2 + x_1$ y $x = a_3t_1 + a_4t_2 + x_2$, donde

$$a_1 = (1, 2, 2, 2),\quad a_2 = (2, -2, 1, 2),$$
$$a_3 = (2, 0, 2, 1),\quad a_4 = (1, -2, 0, -1);$$
$$x_1 = (4, 5, 3, 2),\quad x_2 = (1, -2, 1, -3).$$

1378*. Se denomina símplice n-dimensional regular de un espacio euclídeo R_p $(p \geqslant n)$ una clausura convexa (véase el problema 1347) del sistema de $n + 1$ puntos que se encuentran uno de otro a distancia igual. Los puntos del sistema dado se denominan vértices; los segmen-

tos que los unen, aristas, y las clausuras convexas de los subsistemas de $k+1$ puntos del sistema dado se llaman facetas k-dimensionales del símplice. Dos facetas se denominan opuestas si no tienen vértices comunes y cualquiera de las $n+1$ vértices del símplice es el vértice de una de esas facetas.

Hallar la distancia entre dos facetas opuestas de dimensiones k y $n-k-1$ de un símplice n-dimensional, con las aristas cuya longitud es igual a la unidad, y demostrar qué dicha distancia es igual a la de entre los centros de esas facetas.

1379*. Sea e un vector de longitud igual a la unidad del espacio euclídeo (o unitario) R_n. Demostrar que cualquier vector x perteneciente a R_n se representa unívocamente como $x = \alpha e + z$, donde $(z, e) = 0$. El número α se llama proyección del vector x sobre la dirección de e y se designa por $\mathrm{pr}_e x$.

Demostrar que:

a) $\mathrm{pr}_e(x+y) = \mathrm{pr}_e x + \mathrm{pr}_e y$; b) $\mathrm{pr}_e(\lambda x) = \lambda\, \mathrm{pr}_e x$; c) $\mathrm{pr}_e x = (x, e)$; d) para cualquier base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ y cualquier vector x se cumple la igualdad $x = \sum\limits_{i=1}^{n} (\mathrm{pr}_{e_i} x)\cdot e_i$.

1380*. Sea $e_1, \ldots, e_k$ un sistema ortonormal de vectores del espacio euclídeo R_n. Demostrar que para cualquier vector x de R_n tiene lugar la desigualdad (desigualdad de Bessel)

$$\sum_{i=1}^{k} (pr_{e_i} x)^2 \leqslant |x|^2,$$

con la particularidad de que esta desigualdad se convierte en igualdad (igualdad de Parseval) para cualquier x perteneciente a R_n cuando, y sólo cuando, $k = n$, o sea, el sistema $e_1, \ldots, e_k$ es una base ortonormal.

1381*. Demostrar la desigualdad de Cauchy—Buniakovski

$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y)$$

para cualesquiera vectores x e y del espacio euclídeo con la particularidad de que el signo de igualdad surge si, y sólo si, los vectores x e y son linealmente dependientes.

1382*. Demostrar la desigualdad de Cauchy—Buniakovski

$$(x, y)(y, x) \leqslant (x, x)(y, y)$$

para cualesquiera vectores x e y del espacio unitario con la particularidad de que el signo de igualdad aparece cuando, y sólo cuando, los vectores x e y son linealmente dependientes.

1383. Haciendo uso de la desigualdad de Cauchy—Buniakovski, demostrar las siguientes desigualdades:

a) $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2$

para cualesquiera números reales $a_1, \ldots, a_n$; $b_1, \ldots, b_n$ (véase el problema 503);

b) $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\bar{b}_i\right|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2$

para cualesquiera números complejos $a_1, \ldots, a_n$; $b_1, \ldots, b_n$ (véase el problema 505).

1384. En un espacio vectorial de dimensión infinita de todas las funciones reales, continuas en el segmento $[a, b]$ con las corrientes adición de las funciones y multiplicación de la función por un número, se da un producto escalar $(f, g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$. Comprobar la verificación de todas las propiedades del producto escalar del espacio euclídeo (véase la introducción) y escribir la desigualdad de Cauchy—Buniakovski para este espacio.

Hallar las longitudes de los lados y los ángulos interiores de los triángulos, cuyos vértices están dados por sus coordenadas:

1385. $A(2, 4, 2, 4, 2)$, $B(6, 4, 4, 4, 6)$, $C(5, 7, 5, 7, 2)$.

1386. $A(1, 2, 3, 2, 1)$; $B(3, 4, 0, 4, 3)$; $C\left(1 + \frac{5}{26}\sqrt{78},\ 2 + \frac{5}{13}\sqrt{78},\ 3 + \frac{10}{13}\sqrt{78},\ 2 + \frac{5}{13}\sqrt{78},\ 1 + \frac{5}{26}\sqrt{78}\right)$.

1387. Demostrar la siguiente generalización del teorema de las matemáticas elementales sobre dos perpendiculares: si el vector x del espacio euclídeo (o unitario) es ortogonal a cada uno de los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_k$, es también ortogonal a cualquier vector del subespacio lineal L, tendido sobre los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

1388. Demostrar que si $x = \alpha y$, $|x| = |\alpha| \cdot |y|$. Aquí $|x|$, $|y|$ son las longitudes de los vectores x, y, respectivamente.

1389*. Demostrar que el cuadrado de la diagonal de un paralelogramo n-dimensional es igual a la suma de los cuadrados de sus aristas que salen de un mismo vértice (la generalización n-dimensional del teorema de Pitágoras).

1390*. Demostrar el teorema de que la suma de los cuadrados de las diagonales del paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados.

1391. Aplicando la multiplicación escalar de los vectores, demostrar el teorema de que el cuadrado del lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los dos otros lados sin el producto duplicado de estos lados por el coseno del ángulo entre ellos.

1392. Haciendo uso de la desigualdad de Cauchy—Buniakovski, demostrar la desigualdad de un triángulo: si $\rho(X, Y)$ es la distancia entre los puntos X e Y, para cualesquiera tres puntos A, B y C tenemos $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geqslant \rho(A, C)$ con la particularidad de

que la igualdad surge cuando, y sólo cuando, el vector x trazado de A a B, e y, trazado de B a C, son colineales y tienen la misma dirección.

1393. Hallar la cantidad de diagonales de un cubo n-dimensional, ortogonales a la diagonal dada.

1394. Hallar la longitud de la diagonal de un cubo n-dimensional con la arista a y el límite de esa longitud para $n \to \infty$.

1395. Demostrar que todas las diagonales de un cubo n-dimensional forman un mismo ángulo φ_n con todas sus aristas. Hallar este ángulo y su límite para $n \to \infty$. ¿Para qué valor de n obtendremos $\varphi_n = 60°$?

1396. Hallar la expresión para el radio R de una esfera, circunscrita alrededor de un cubo n-dimensional, a través de la arista a; ¿cuál de estas magnitudes R y a es más grande para diferentes n?

1397. Demostrar que la proyección ortogonal de cualquier arista de un cubo n-dimensional sobre cualquier diagonal de este cubo es igual, según su valor absoluto, a $1/n$ de la longitud de la diagonal.

1398*. Demostrar que las proyecciones ortogonales de los vértices de un cubo n-dimensional sobre cualquiera de sus diagonales, la dividen en n partes iguales.

1399*. Sean x, y vectores no nulos de un espacio euclídeo R_n. Demostrar que:

a) $x = \alpha y$, donde $\alpha > 0$ cuando, y sólo cuando, el ángulo entre x e y es cero;

b) $x = \alpha y$, donde $\alpha < 0$, cuando, y sólo cuando, el ángulo entre x e y es igual a π.

1400*. Demostrar que entre todos los vectores del subespacio lineal L el ángulo mínimo con el vector x dado lo forma la proyección ortogonal y del vector x sobre L. En este caso, la igualdad $\cos(x, y) = \cos(x, y')$, donde $y' \in L$, se cumple cuando, y sólo cuando, $y' = \alpha y$, donde $\alpha > 0$.

1401. Hallar el ángulo entre la diagonal de un cubo n-dimensional y su faceta k-dimensional.

Hallar el ángulo entre el vector x y el subespacio lineal tendido sobre los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_k$:

1402. $x = (2, 2, 1, 1)$;
$a_1 = (3, 4, -4, -1)$,
$a_2 = (0, 1, -1, 2)$.

1403. $x = (1, 0, 3, 0)$;
$a_1 = (5, 3, 4, -3)$,
$a_2 = (1, 1, 4, 5)$,
$a_3 = (2, -1, 1, 2)$.

1404. Se denomina *ángulo* entre dos subespacios lineales L_1 y L_2 del espacio euclídeo R_n que no tienen vectores no nulos comunes, el mínimo de los ángulos entre los vectores no nulos x_1, x_2, donde $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$. Si la intersección $L_1 \cap L_2 = D \neq 0$, con la particularidad de que $D \neq L_1$, $D \neq L_2$, se llama ángulo entre L_1 y L_2 al ángulo entre sus intersecciones con el complemento ortogonal D^* e la intersección D. Si uno de los subespacios contiene el otro (por

ejemplo, si los dos coinciden), el ángulo entre ellos se considera igual a cero. Se denomina ángulo entre variedades lineales el ángulo entre los subespacios que les corresponden. Mostrar que el ángulo entre cualesquiera subespacios o variedades siempre está definido y es igual a cero cuando, y sólo cuando, uno de los subespacios o variedades contiene el otro o las variedades son paralelas.

1405*. Hallar el ángulo entre las facetas bidimensionales $A_0A_1A_2$ y $A_0A_3A_4$ de un símplice cuadridimensional regular (véase el problema 1378) $A_0A_1A_2A_3A_4$.

1406*. Hallar el ángulo entre las superficies $\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1t_1 + \boldsymbol{a}_2t_2$ y $\boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{b}_1t_1 + \boldsymbol{b}_2t_2$, donde

$$\boldsymbol{a}_0 = (3,\ 1,\ 0,\ 1),\quad \boldsymbol{a}_1 = (1,\ 0,\ 0,\ 0),\quad \boldsymbol{a}_2 = (0,\ 1,\ 0,\ 0),$$
$$\boldsymbol{b}_0 = (2,\ 1,\ 1,\ 3),\quad \boldsymbol{b}_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1),\quad \boldsymbol{b}_2 = (1,\ -1,\ 1,\ -1).$$

1407*. Supongamos que se da un sistema linealmente independiente de vectores $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_s$ y dos sistemas ortogonales de vectores no nulos $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_s$ y $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_s$, tales que los vectores $\boldsymbol{f}_k$ y $\boldsymbol{g}_k$ se expresan linealmente a través de $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$. Demostrar que $\boldsymbol{f}_k = \alpha_k\boldsymbol{g}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$, donde $\alpha_k \neq 0$.

1408*. Sea $\boldsymbol{R}_{n+1}$ un espacio euclídeo, en el cual a título de vectores se toman todos los polinomios de grado $\leqslant n$ con coeficientes reales respecto a una indeterminada x y el producto escalar de los polinomios $f(x)$ y $g(x)$ se determina así: $(f, g) = \int\limits_{-1}^{+1} f(x)\, g(x)\, dx$.

Demostrar que los siguientes polinomios, conocidos bajo el nombre de polinomios de Legendre:

$$P_0(x) = 1,\quad P_k(x) = \frac{1}{2^k k!}\cdot\frac{d^k}{dx^k}[(x^2-1)^k]\quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

forman una base ortogonal del espacio $\boldsymbol{R}_{n+1}$.

1409. Partiendo de la definición de los polinomios de Legendre, dada en el problema anterior, hallar los polinomios $P_k(x)$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Cerciorarse de que $P_k(x)$ tiene el grado k y escribir la expresión ampliada según los grados de x, para $P_k(x)$ siendo k cualquiera.

1410*. Calcular la «longitud» del polinomio de Legendre $P_k(x)$ como un vector del espacio euclídeo $\boldsymbol{R}_{n+1}$ del problema 1408.

1411*. Calcular el valor del polinomio de Legendre $P_k(x)$ para $x = 1$.

1412*. Demostrar que si a la base $1, x, x^2, \ldots, x^n$ del espacio euclídeo $\boldsymbol{R}_{n+1}$ del problema 1408 se le aplica el proceso de ortogonalización, se obtendrán polinomios $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)$ que se diferencian de los correspondientes polinomios de Legendre sólo por factores constantes. Hallar dichos factores.

1413. Supongamos que el proceso de ortogonalización traslada los vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ a los vectores $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$, res-

pectivamente. Demostrar que b_k es una componente ortogonal del vector a_k con respecto al subespacio lineal L_{k-1}, tendido sobre $a_1, \ldots, a_{k-1}$ $(k > 1)$. Prosiguiendo, demostrar que

$$0 \leqslant |b_k| \leqslant |a_k| \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

con la particularidad de que $|b_k| = 0$ cuando, y sólo cuando a_k se expresa linealmente a través de $a_1, \ldots, a_{k-1}$ $(k > 1)$ ó $a_1 = 0$ $(k = 1)$; $|b_k| = |a_k|$ cuando, y sólo cuando, $(a_k, a_j) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, k-1;\ k > 1)$ ó $k = 1$.

1414*. Demostrar que la integral $\int\limits_{-1}^{+1} [f(x)]^2\,dx$, donde $f(x)$ es un polinomio de grado n con coeficientes reales y el coeficiente mayor igual a la unidad, alcanza su mínimo, igual a $\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)(C_{2n}^n)^2}$, cuando, y sólo cuando, $f(x) = \frac{2^n}{C_{2n}^n} P_n(x)$, donde $P_n(x)$ es el polinomio de Legendre de grado n (véase el problema 1408).

1415. El determinante

$$g(a_1, \ldots, a_k) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \ldots & (a_1, a_k) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \ldots & (a_2, a_k) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & \ldots & (a_k, a_k) \end{vmatrix}$$

se denomina determinante de Gram de los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_k$ del espacio euclídeo (o unitario) R_n.

Demostrar que el determinante de Gram no varía, al aplicar a los vectores $a_1, \ldots, a_k$ el proceso de ortogonalización, es decir, si como resultado de la ortogonalización, los vectores $a_1, \ldots, a_k$ se convertirán en vectores $b_1, \ldots, b_k$, entonces

$$g(a_1, \ldots, a_k) = g(b_1, \ldots, b_k) = (b_1, b_1)(b_2, b_2) \ldots (b_k, b_k).$$

Haciendo uso de esto, aclarar el sentido geométrico de $g(a_1, a_2)$ y $g(a_1, a_2, a_3)$, suponiendo que los vectores son linealmente independientes.

1416*. Demostrar que para que los vectores $a_1, \ldots, a_k$ del espacio euclídeo (o unitario) sean linelamente dependientes, es necesario y suficiente que el determinante de Gram de estos vectores sea nulo.

1417*. Dos bases $e_1, \ldots, e_n$ y $f_1, \ldots, f_n$ del espacio euclídeo (o unitario) se denominan recíprocas si

$$(e_i, f_j) = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j, \\ 0 & \text{para } i \neq j. \end{cases}$$

Demostrar que para cualquier base $e_1, \ldots, e_n$ existe una base recíproca y ésta se determina unívocamente.

1418. Sea S una matriz del cambio de la base $e_1, \ldots, e_n$ por la base $e'_1, \ldots, e'_n$. Hallar la matriz T del cambio de la base $f_1, \ldots, f_n$, recíproca de $e_1, \ldots, e_n$, por la base $f'_1, \ldots, f'_n$, recíproca de $e'_1, \ldots, e'_n$:

a) en un espacio euclídeo; b) en un espacio unitario.

1419*. Demostrar que el determinante de Gram $g(a_1, \ldots, a_k)$ es nulo si los vectores $a_1, \ldots, a_k$ son linealmente dependientes, y es positivo si éstos son linealmente independientes.

1420. Demostrar que si los vectores $a_1, \ldots, a_n$ linealmente independientes se transforman mediante el proceso de ortogonalización en los vectores $b_1, \ldots, b_n$, entonces $|b_k|^2 = \frac{g(a_1, \ldots, a_k)}{g(a_1, \ldots, a_{k-1})}$ $(k = 1, 2, \ldots, n$; el determinante de Gram con el número nulo de vectores se toma igual a la unidad).

1421*. En un espacio de polinomios, cuyo grado no supera a n, con respecto a una indeterminada x con coeficientes reales, el producto escalar se prefija mediante la igualdad $(f, g) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$.

Hallar la distancia entre el origen de las coordenadas y la variedad lineal que consta de todos los polinomios de grado n con el coeficiente mayor igual a la unidad.

1422*. Demostrar que para el determinante de Gram es válida la desigualdad

$$0 \leqslant g(a_1, \ldots, a_k) \leqslant |a_1|^2 \ldots |a_k|^2,$$

con la particularidad de que $g(a_1, \ldots, a_k) = 0$ cuando, y sólo cuando, los vectores $a_1, \ldots, a_k$ son linealmente dependientes, y $g(a_1, \ldots, a_k) = |a_1|^2 \ldots |a_k|^2$ cuando, y sólo cuando, bien los vectores $a_1, \ldots, a_k$ son ortogonales de dos en dos, o bien por lo menos uno de esos vectores es nulo.

1423. Haciendo uso del problema anterior, demostrar la desigualdad de Hadamard, a saber: si $D = |a_{ij}|_1^n$ es un determinante con elementos reales, entonces $D^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$ (véase el problema 923), con la particularidad de que el signo de igualdad tiene lugar cuando, y sólo cuando, bien

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = 0 \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

o bien el determinante D contiene una fila nula. ¿Cómo cambiará la afirmación para un determinante con elementos complejos?

1424*. Demostrar que el determinante D_f de la forma cuadrática determinada positiva $f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ satisface la igualdad $D_f \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

1425*. Demostrar que cualquier matriz simétrica real $A = (a_{ij})_1^n$ cuyos menores principales son no negativos, es la matriz de Gram, es decir, existe un sistema de vectores $e_1, \ldots, e_n$ del espacio euclídeo R_n, tal que

$$(e_i, e_j) = a_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

1426*. Demostrar que cualquier matriz hermitiana $A = (a_{ij})_1^n$, cuyos menores principales son no negativos, es la matriz de Gram, o sea, existe un sistema de vectores $e_1, \ldots, e_n$ de un espacio unitario R_n, tal que

$$(e_i, e_j) = a_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

1427*. Determinemos el volumen de un paralelepípedo n-dimensional —construido en los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_n$ linealmente independientes, del espacio euclídeo— de modo inductivo mediante las condiciones:

1) $V(a_1) = |a_1|$;

2) $V(a_1, \ldots, a_n) = V(a_1, \ldots, a_{n-1}) \cdot h_n$, donde h_n es la longitud de la componente ortogonal del vector a_n con respecto al subespacio, tendido sobre los vectores $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Demostrar que

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt{g(a_1, \ldots, a_n)} = |D|,$$

donde D es un determinante formado de las coordenadas de los vectores dados en alguna base ortonormal del espacio n-dimensional, tendido sobre los vectores $a_1, \ldots, a_n$.

1428*. Demostrar que el volumen del paralelepípedo n-dimensional no supera al producto de las longitudes de sus aristas que salen de un vértice, y es igual a dicho producto cuando, y sólo cuando, estas aristas son ortogonales de dos en dos, es decir, cuando el paralelepípedo es un paralelogramo.

1429*. Demostrar la siguiente propiedad del determinante de Gram:

$$g(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l) \leqslant g(a_1, \ldots, a_k)\, g(b_1, \ldots, b_l) \qquad (1)$$

con la particularidad de que el signo de igualdad tiene lugar cuando, y sólo cuando, bien

$$(a_i, b_j) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k; \ \ j = 1, 2, \ldots, l) \qquad (2)$$

o bien por lo menos uno de los subsistemas $a_1, \ldots, a_k$ y $b_1, \ldots, b_l$ es linealmente dependiente.

1430*. Demostrar la siguiente propiedad del volumen de un paralelepípedo: $V(a_1, \ldots, a_k; b_1, \ldots, b_l) \leqslant V(a_1, \ldots, a_k) \times V(b_1, \ldots, b_l)$ con la particularidad de que el signo de igualdad tiene lugar cuando, y sólo cuando, $(a_i, b_j) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k;$ $j = 1, 2, \ldots, l)$.

1431*. Demostrar que si A es una matriz simétrica real de orden n con menores principales no negativos, A_1 es una matriz de orden

$k < n$ en el ángulo superior izquierdo y A_2, una matriz de orden $n - k$ en el ángulo inferior derecho de la matriz A, $|A| \leqslant |A_1| \times \times |A_2|$ (compárese con el problema 922).

1432*. Resolver el problema, análogo al anterior, si A es una matriz hermitiana con menores principales no negativos.

1433*. Hallar las condiciones necesarias y suficientes para que C_{n+1}^2 números positivos

$$a_{ij} \quad (i, j = 0, 1, 2, \ldots, n; \ i > j) \tag{1}$$

sean:

a) distancias de todos los posibles pares de vértices de cierto símplice n-dimensional de un espacio euclídeo R_n (es decir, del sistema de $n + 1$ puntos que no yacen en una variedad lineal $(n - 1)$-dimensional);

b) distancias de todos los posibles pares de puntos de cierto sistema de $n + 1$ puntos del espacio euclídeo R_n.

§ 18. Transformaciones lineales de los espacios vectoriales arbitrarios

En este párrafo, a cierta excepción, se examinan transformaciones lineales de los espacios vectoriales afines. Las transformaciones de los espacios euclídeos y unitarios se estudian en el siguiente párrafo.

Las transformaciones lineales se indican con la notación φ, ψ, etc., la imagen del vector x durante la transformación φ, con φx, el sistema de vectores $\varphi a_1, \ldots, \varphi a_n$, con $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$.

Se denomina matriz de la transformación lineal φ en la base $e_1, \ldots, e_n$ una matriz A_φ, cuyas columnas se forman de las coordenadas de las imágenes de la base $\varphi e_1, \ldots, \varphi e_n$ en la misma base $e_1, \ldots, e_n$; en otras palabras, la matriz A_φ se determina mediante la igualdad

$$\varphi(e_1, \ldots, e_n) = (e_1, \ldots, e_n) A_\varphi. \tag{1}$$

Sea T la matriz del cambio de la base $e_1, \ldots e_n$ por la base $f_1, \ldots, f_n$ (véase la introducción al § 16), A_φ y B_φ son las matrices de la transformación φ en la primera y segunda bases, respectivamente. Entonces tiene lugar la relación

$$B_\varphi = T^{-1} A_\varphi T. \tag{2}$$

Las coordenadas $y_1, \ldots, y_n$ de la imagen φx del vector x para la transformación lineal φ se expresan mediante las coordenadas de $x_1, \ldots, x_n$ de la preimagen de x en la misma base con ayuda de la matriz $A_\varphi = (a_{ij})_1^n$ de la transformación lineal φ en la misma base de la siguiente manera: $y_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ $(i = 1, \ldots, n)$ o en la anotación matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} = A_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Se denominan suma de $\varphi + \psi$, producto de $\varphi\psi$ de dos transformaciones lineales φ y ψ y producto de $\alpha\varphi$ del número α por la transformación lineal φ del

espacio R_n las transformaciones que se determinan respectivamente por las igualdades

$$(\varphi + \psi) x = \varphi x + \psi x, \ (\varphi\psi) x = \varphi (\psi x), \ (\alpha\varphi) x = \alpha (\varphi x),$$

para cualquier vector x del espacio R_n.

1434. Demostrar que el giro del plano en un ángulo α alrededor del origen de coordenadas es una transformación lineal y hallar la matriz de esta transformación en cualquier base ortonormal si la dirección positiva de la lectura de los ángulos coincide con la del giro más corto que transforma el primer vector básico en el segundo.

1435. Demostrar que el giro de un espacio tridimensional en un ángulo $2\pi/3$ alrededor de una recta, prefijada en un sistema rectangular de coordenadas mediante las ecuaciones $x_1 = x_2 = x_3$, es una transformación lineal y hallar la matriz de esta transformación en la base de versores e_1, e_2, e_3 de los ejes de coordenadas.

1436. Demostrar que la proección de un espacio tridimensional sobre el eje de coordenadas del vector e_1 paralelamente al plano de coordenadas de los vectores e_2 y e_3 es una transformación lineal y hallar su matriz en la base de e_1, e_2, e_3.

1437. Demostrar que la proyección de un espacio tridimensional sobre el plano de coordenadas de los vectores e_1, e_2 paralelamente al eje de coordenadas del vector e_3 es una transformación lineal y hallar su matriz en la base de e_1, e_2, e_3.

1438. Demostrar que la proyección ortogonal de un espacio tridimensional sobre el eje que forma ángulos iguales con los ejes de un sistema rectangular de coordenadas, es una transformación lineal y hallar su matriz en la base de los versores de los ejes de coordenadas.

1439. Sea el espacio R_n una suma directa de los subespacios lineales L_1 con la base $a_1, \ldots, a_k$ y L_2 con la base $a_{k+1}, \ldots, a_n$. Demostrar que la proyección del espacio sobre L_1 paralelamente a L_2 es una transformación lineal y hallar la matriz de dicha transformación en la base $a_1, \ldots, a_n$.

1440. Demostrar que existe la única transformación lineal del espacio R_n que convierte los vectores linealmente independientes $a_1, \ldots, a_n$ dados en los vectores $b_1, \ldots, b_n$ dados. ¿De qué modo hallar la matriz de esta transformación en la base $a_1, \ldots, a_n$?

Aclarar cuáles de las siguientes transformaciones φ, prefijadas mediante la representación de las coordenadas del vector φx como funciones de las coordenadas del vector x, son lineales, y en caso de la linealidad, hallar sus matrices en la misma base en la que se dan las coordenadas de los vectores x y φx.

1441. $\varphi x = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$.

1442. $\varphi x = (x_1, x_2 + 1, x_3 + 2)$.

1443. $\varphi x = (2x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_3^2)$.

1444. $\varphi x = (x_1 - x_2 + x_3, x_3, x_2)$.

Demostrar que existe la única transformación lineal de un espacio tridimensional que convierte los vectores a_1, a_2, a_3 en b_1, b_2, b_3,

respectivamente, y hallar la matriz de esta transformación en la misma base, en la cual se dan las coordenadas de todos los vectores:

1445. $a_1 = (2, 3, 5)$, $b_1 = (1, 1, 1)$,
$a_2 = (0, 1, 2)$, $b_2 = (1, 1, -1)$,
$a_3 = (1, 0, 0)$, $b_3 = (2, 1, 2)$.

1446. $a_1 = (2, 0, 3)$, $b_1 = (1, 2, -1)$,
$a_2 = (4, 1, 5)$, $b_2 = (4, 5, -2)$,
$a_3 = (3, 1, 2)$, $b_3 = (1, -1, 1)$.

1447. Supongamos que la transformación lineal φ del espacio R_n convierte los vectores linealmente independientes $a_1, \ldots, a_n$ en vectores $b_1, \ldots, b_n$, respectivamente. Demostrar que la matriz A_φ de dicha transformación en cierta base $e_1, \ldots, e_n$ puede hallarse de la igualdad $A_\varphi = BA^{-1}$, donde las columnas de las matrices A y B constan de las coordenadas de los vectores $a_1, \ldots, a_n$ y de $b_1, \ldots, b_n$, respectivamente, en la base $e_1, \ldots, e_n$.

1448. Demostrar que la transformación de un espacio tridimensional $\varphi x = (x, a)\, a$, donde $a = (1, 2, 3)$, es una transformación lineal y hallar sus matrices en una base ortonormal e_1, e_2, e_3, en la cual se dan las coordenadas de todos sus vectores, y en la base de $b_1 = (1, 0, 1)$, $b_2 = (2, 0, -1)$, $b_3 = (1, 1, 0)$.

1449. Mostrar que las multiplicaciones de las matrices cuadradas de segundo orden a) a la izquierda, b) a la derecha por una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dada son transformaciones lineales del espacio de todas las matrices de segundo orden, y hallar las matrices de estas transformaciones en la base que consta de las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1450. Mostrar que la diferenciación es una transformación lineal de un espacio de todos los polinomios de grado $\leqslant n$ con respecto a una indeterminada con coeficientes reales.

Hallar la matriz de esta transformación en la base:

a) $1, x, x^2, \ldots, x^n$;

b) $1, x-c, \frac{(x-c)^2}{2!}, \ldots, \frac{(x-c)^n}{n!}$, donde c es un número real.

1451. ¿Cómo cambiará la matriz de una transformación lineal si en la base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ se permutan de lugar dos vectores e_i, e_j?

1452. La transformación lineal φ en la base e_1, e_2, e_3, e_4 tiene la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hallar la matriz de la misma transformación en la base:

a) e_1, e_2, e_3, e_4;

b) $e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4$.

1453. La transformación lineal φ en la base e_1, e_2, e_3 tiene una matriz

$$\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Hallar su matriz en la base

$$f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3,\ f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3,\ f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3.$$

1454. La transformación lineal φ en la base $a_1 = (8, -6, 7)$, $a_2 = (-16, 7, -13)$, $a_3 = (9, -3, 7)$ tiene la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

Hallar su matriz en la base

$$b_1 = (1, -2, 1),\ b_2 = (3, -1, 2),\ b_3 = (2, 1, 2).$$

1455. Demostrar que las matrices de una misma transformación en dos bases coinciden cuando, y sólo cuando, la matriz del cambio de una de esas bases por otra es conmutativa con la matriz de dicha transformación lineal en una de las bases dadas.

1456. Demostrar que cualquier transformación lineal φ de un espacio unidimensional se reduce a la multiplicación de todos los vectores por un mismo número, es decir, $\varphi x = \alpha x$, para cualquier vector x.

1457. Supongamos que la transformación φ en la base $a_1 = (1, 2)$, $a_2 = (2, 3)$ tiene la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. La transformación ψ en la base $b_1 = (3, 1)$, $b_2 = (4, 2)$ tiene la matriz $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Hallar la matriz de transformación $\varphi + \psi$ en la base b_1, b_2.

1458. La transformación φ en la base $a_1 = (-3, 7)$, $a_2 = (1, -2)$ tiene la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, y la transformación ψ en la base $b_1 = (6, -7)$, $b_2 = (-5, 6)$ tiene la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Hallar la matriz de transformación $\varphi\psi$ en la misma base en la que se dan las coordenadas de todos los vectores.

1459. Sea φ una transformación lineal de un espacio de polinomios de grado $\leqslant n$ con coeficientes reales, que pasa cada polinomio a su derivada. Mostrar que $\varphi^{n+1} = 0$.

1460. Sean φ una transformación lineal de diferenciación y ψ la multiplicación por x en un espacio de dimensión infinita de todos los polinomios con respecto a x con coeficientes reales.

Demostrar que $\varphi\psi^n - \psi^n\varphi = n\psi^{n-1}$.

1461. Mostrar que las transformaciones lineales de un espacio n-dimensional con respecto a la adición y multiplicación por un número forman de por sí un espacio vectorial. Hallar la dimensión de ese espacio.

1462. La transformación lineal φ del espacio R_n se denomina *regular* si su matriz A_φ en alguna (lo que significa que en cualquiera) base es regular, es decir, $|A_\varphi| \neq 0$. Demostrar que esta definición es equivalente a cada una de las siguientes: la transformación lineal φ es regular si: a) de $\varphi x = 0$ se desprende que $x = 0$; b) al transformar φ cualquier base del espacio pasa de nuevo a la base; c) la transformación de φ es biunívoca, o sea, si $x_1 \neq x_2$, entonces $\varphi x_1 \neq \varphi x_2$; d) φ aplica el espacio sobre todo el espacio, o sea, para cualquier $y \in R_n$ se encontrará $x \in R_n$, tal que $\varphi x = y$; e) φ posee una transformación inversa ψ, es decir, $\psi(\varphi x) = x$ para cualquier $x \in R_n$.

1463. Sean x un vector propio de la transformación lineal φ el cual pertenece al valor propio de λ, y $f(t)$ un polinomio. Demostrar que el mismo vector x será un vector propio de la transformación $f(\varphi)$, perteneciente al valor propio de $f(\lambda)$. En otras palabras, demostrar que de $\varphi x = \lambda x$ se desprende que $f(\varphi)\,x = f(\lambda)\,x$.

1464*. Sean x un vector propio de la transformación lineal φ perteneciente al valor propio de λ, y $f(t)$ una función para la cual la transformación $f(\varphi)$ tiene sentido (si φ en cierta base tiene una matriz A, entonces $f(\varphi)$ se determina en la misma base mediante la matriz $f(A)$ con la particularidad de que puede demostrarse que $f(\varphi)$ no depende de la elección de la base). Demostrar que el mismo vector x será propio de la transformación $f(\varphi)$, perteneciente al valor propio de $f(\lambda)$.

Hallar los valores y vectores propios de las transformaciones lineales, prefijados en cierta base mediante las matrices:

1465. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. **1466** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1467 $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. **1468.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

1469. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$. **1470** $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

1471. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. **1472** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1473. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **1974.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1475. Demostrar que los vectores propios de una transformación lineal, pertenecientes a diversos valores propios, son linealmente independientes.

1476. Demostrar que cualquier matriz cuadrada A con distintos números característicos, es semejante a una matriz diagonal (sobre un campo que contiene tanto elementos de la matriz, como también sus números característicos).

1477. Demostrar que si la transformación lineal φ del espacio R_n tiene n diferentes valores propios, cualquier transformación lineal ψ conmutativa con φ, posee una base de vectores propios con la particularidad de que cualquier vector propio de φ será propio también para ψ.

1478. Demostrar que una matriz de la transformación lineal en cierta base es diagonal cuando, y sólo cuando, la base consta de los vectores propios de dicha transformación.

Aclarar cuáles de las siguientes matrices de las transformaciones lineales pueden reducirse a la forma diagonal, pasando a la nueva base. Hallar esa base y la matriz correspondiente a ella:

1479. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. **1480.** $\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1481. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1482. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8 & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. **1483.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1484*. Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de orden n hallar una matriz regular T para la cual la matriz $B = T^{-1}AT$ sea diagonal, y hallar esa matriz B.

1485. Se denomina *polinomio mínimo para el vector* x con relación a la transformación lineal φ el polinomio $g_x(\lambda)$ con el coeficiente mayor igual a la unidad que posee el grado mínimo entre todos los

polinomios que anulan, para x con respecto a φ, es decir, los polinomios $f(\lambda)$ con la propiedad $f(\varphi)\, x = 0$.

Se determina de modo análogo el polinomio $g(\lambda)$ con relación a la transformación lineal φ para todo el espacio. Demostrar que el polinomio mínimo $g(\lambda)$ de la transformación lineal φ es igual al mínimo común múltiplo de los polinomios mínimos para los vectores de cualquier base del espacio con respecto a φ.

1486*. Hallar las condiciones para las cuales la matriz A que posee en la diagonal secundaria los números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ y en los demás lugares ceros, es semejante a la matriz diagonal.

1487. Hallar los valores y vectores propios de una transformación lineal que es la diferenciación de los polinomios de grado $\leqslant n$ con coeficientes reales.

1488. Sea φ una transformación lineal del espacio $\boldsymbol{R}_n$. El conjunto de todos los vectores φx, donde x es cualquier vector perteneciente a $\boldsymbol{R}_n$, se denomina *imagen de* $\boldsymbol{R}_n$ *para la transformación* φ o *campo de valores* de φ. El conjunto de todos los vectores x pertenecientes a $\boldsymbol{R}_n$, tales que $\varphi x = 0$, se denomina *preimagen completa de cero para la transformación* φ o *núcleo* de φ. Demostrar que: a) el campo de valores de φ es un subespacio lineal $\boldsymbol{R}_n$ cuya dimensión es igual al rango de φ; b) el núcleo de φ es el subespacio lineal del espacio $\boldsymbol{R}_n$, cuya dimensión es igual al defecto de φ, es decir, a la diferencia entre n y el rango de φ.

1489. Sean φ una transformación lineal y L un subespacio del espacio $\boldsymbol{R}_n$. Demostrar que: a) la imagen φL y b) la preimagen completa $\varphi^{-1}L$ del subespacio L son de nuevo subespacios para la transformación lineal φ.

1490. Demostrar que para una transformación lineal regular φ del espacio $\boldsymbol{R}_n$ la dimensión: a) de la imagen φL y b) de la preimagen completa $\varphi^{-1}L$ de cualquier transformación lineal L es igual a la dimensión de L.

1491*. Designemos la dimensión del subespacio lineal L por dim. L y el defecto de la transformación lineal φ por el def. φ. Demostrar que las dimensiones de la imagen y la preimagen completa del subespacio L del espacio $\boldsymbol{R}_n$ para la transformación φ satisfacen las desigualdades:

a) $\dim. L - \text{def.}\, \varphi \leqslant \dim. \varphi L \leqslant \dim. L$;

b) $\dim. L \leqslant \dim. \varphi^{-1}L \leqslant \dim. L + \text{def.}\, \varphi$.

1492*. Haciendo uso del problema anterior, demostrar las desigualdades de Sylvester para el rango de un producto de dos matrices cuadradas A y B de orden n: $r_A + r_B - n \leqslant r_{AB} \leqslant \text{mín}\,(r_A, r_B)$ (véase el problema 931).

1493. Demostrar que:

a) el rango $(\varphi + \psi) \leqslant$ rango φ + rango ψ;

b) def. $(\varphi\psi) \leqslant$ def. φ + def. ψ para cualesquiera transformaciones lineales φ y ψ del espacio $\boldsymbol{R}_n$.

1494. Hallar los valores propios y los vectores propios de la

transformación lineal φ dada en la base a_1, a_2, a_3, a_4 por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mostrar que el subespacio tendido sobre los vectores $a_1 + 2a_2$ y $a_2 + a_3 + 2a_4$ es invariante con respecto a φ.

1495*. Demostrar que la cantidad de vectores propios, linealmente independientes, de la transformación φ, pertenecientes a un valor propio de λ_0 no supera a la multiplicidad de λ_0 como raíz del polinomio característico de la transformación φ.

1496. Demostrar que un subespacio lineal tendido sobre cualquier sistema de vectores propios de la transformación φ, es invariante con relación a φ.

1497. Demostrar que el conjunto de todos los vectores propios de una transformación lineal φ, pertenecientes a un mismo valor propio de λ_0 (junto con el vector nulo), es un subespacio lineal, invariante con respecto a φ.

1498. Demostrar que todos los vectores de un espacio distintos de cero, son vectores propios de la transformación lineal φ cuando, y sólo cuando, φ es la transformación de semejanza, es decir, $\varphi x = \alpha x$, siendo α el mismo para cualquier vector x.

1499. Demostrar que cualquier subespacio L, invariante con respecto a una transformación lineal regular φ, será también invariante con relación a la transformación inversa φ^{-1}.

1500. Demostrar que: a) la imagen φL y b) la preimagen completa $\varphi^{-1}L$ del subespacio lineal L, invariante con respecto a una transformación lineal φ, serán ellas mismas invariantes con relación a φ.

1501. Hallar todos los subespacios lineales del espacio de los polinomios con respecto a una indeterminada de grado $\leqslant n$ con coeficientes reales, subespacios invariantes con respecto a la transformación φ que convierte cualquier polinomio en su derivada.

1502. Demostrar que la matriz de una transformación lineal φ de un espacio n-dimensional en la base $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es una matriz celular semidescompuesta tipo:

a) $\begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, donde A_1 es una matriz cuadrada de orden $k < n$, cuando, y sólo cuando, el subespacio lineal tendido sobre los primeros k vectores de la base $a_1, \ldots, a_k$, es invariante con respecto a φ;

b) $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{pmatrix}$, donde A_1 es una matriz cuadrada de orden $k < n$, cuando, y sólo cuando, el subespacio lineal, tendido sobre los últimos $n - k$ vectores de la base $a_{k+1}, \ldots, a_n$, es invariante con respecto a φ;

c) la matriz será descompuesta celular tipo $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, donde A_1 es una matriz cuadrada de orden k, cuando, y sólo cuando, tanto el subespacio, tendido sobre los vectores $a_1, \ldots, a_k$, como también el subespacio, tendido sobre los vectores $a_{k+1}, \ldots, a_n$, es invariante con respecto a φ.

1503*. Supongamos que la transformación lineal φ de un espacio n-dimensional R_n en la base $a_1, \ldots, a_n$, tiene una matriz diagonal con diferentes elementos en la diagonal. Hallar todos los subespacios lineales, invariantes con respecto a φ, y determinar su cantidad.

1504. Hallar todos los subespacios de un espacio tridimensional, invariantes con respecto a la transformación lineal, prefijada mediante la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1505. Hallar todos los subespacios de un espacio tridimensional, invariantes simultáneamente con respecto a dos transformaciones lineales, prefijadas mediante las matrices:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

1506. Demostrar que cualesquiera dos transformaciones lineales conmutativas de un espacio complejo tienen un vector propio común.

1507. Demostrar que para cualquier conjunto (aunque sea infinito) de transformaciones lineales conmutativas de dos en dos de un espacio complejo R_n existe un vector, propio para todas las transformaciones de dicho conjunto.

1508. Demostrar que los vectores radicales pertenecientes a distintos valores propios, son linealmente independientes.

Hallar los valores propios y los subespacios radicales de las transformaciones lineales, prefijadas en cierta base mediante las siguientes matrices:

1509. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.

1510. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.

1511. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

1512. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1513. Demostrar que la transformación lineal de un espacio complejo tiene una matriz diagonal en cierta base cuando, y sólo cuando, todos sus vectores radicales son vectores propios.

1514. Demostrar que un espacio complejo consta sólo de vectores radicales de la transformación lineal φ cuando, y sólo cuando, todos los valores propios de dicha transformación son iguales entre sí.

1515. Sean $\boldsymbol{R}$ un espacio de dimensión infinita de todas las funciones reales $f(x)$, definidas y con derivadas de cualquier orden en toda la recta numérica, para las corrientes operaciones de la suma de funciones y multiplicación de la función por un número, y φ una transformación que convierte cualquier función en su derivada.

Hallar: a) todos los valores propios y los vectores propios, b) todos los subespacios radicales de la transformación φ.

1516. El espacio $\boldsymbol{R}_n$ se denomina *cíclico* con respecto a la transformación lineal φ, si $\boldsymbol{R}_n$ posee cierta base cíclica, o sea, la base $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, para la cual

$$\varphi \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{a}_{k+1}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Demostrar que si $\boldsymbol{R}_n$ es un espacio cíclico con respecto a φ y $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ es una base cíclica, entonces:

a) el polinomio mínimo $g(\lambda)$ de la transformación φ tiene el grado n;

b) el polinomio mínimo de todo el espacio coincide con el polinomio mínimo del vector $\boldsymbol{a}_1$;

c) si $\varphi \boldsymbol{a}_n = c_1 \boldsymbol{a}_1 + c_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + c_n \boldsymbol{a}_n$, el polinomio mínimo de la transformación φ se determina mediante la igualdad

$$g(\lambda) = \lambda^n - c_n \lambda^{n-1} - c_{n-1} \lambda^{n-2} - \ldots - c_1.$$

1517. Demostrar que si el grado del polinomio mínimo $g(\lambda)$ de la transformación lineal φ del espacio $\boldsymbol{R}_n$ es igual a n y $g(\lambda)$ es el grado del polinomio irreducible sobre el campo, sobre el cual se examina el espacio $\boldsymbol{R}_n$, o sea, en caso de un espacio complejo $g(\lambda) = (\lambda - \alpha)^n$, entonces:

a) $\boldsymbol{R}_n$ no se descompone en una suma directa de dos subespacios, invariantes con respecto a φ;

b) $\boldsymbol{R}_n$ es cíclico con respecto a φ.

¿Qué forma tiene la matriz de la transformación φ en la base cíclica?

1518. Supongamos que el polinomio mínimo de la transformación lineal φ del espacio $\boldsymbol{R}_n$ tiene el aspecto $(\lambda - \alpha)^n$. Demostrar que existe un vector $\boldsymbol{a}$, tal que los vectores $(\varphi - \alpha\varepsilon)^{n-1} \boldsymbol{a}$, $(\varphi - \alpha\varepsilon)^{n-2} \boldsymbol{a}, \ldots, (\varphi - \alpha\varepsilon) \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}$, donde ε es una transformación idéntica, forman una base del espacio. ¿Qué forma tendrá la matriz de la transformación φ en esta base?

1519. Demostrar que cualquier subespacio $\boldsymbol{L}$ del espacio complejo $\boldsymbol{R}_n$, invariante a la transformación lineal φ, contiene una recta, invariante con relación a φ.

1520. Demostrar que cualquier subespacio $\boldsymbol{L}$ de un espacio real $\boldsymbol{R}_n$, invariante con respecto a la transformación lineal φ y con dimensión impar, contiene una recta, invariante a φ. Mostrar en

ejemplos que para un subespacio de dimensión par la afirmación es incorrecta. ¿En qué condiciones L contiene una recta, todos los puntos de la cual permanecen inmóviles para la transformación φ?

1521. Demostrar que el espacio complejo que contiene sólo una recta, invariante con respecto a la transformación lineal φ, es indescomponible en la suma directa de dos subespacios no nulos, invariantes a φ.

1522. Demostrar que el espacio complejo R_n con respecto a la transformación lineal φ dada se descompone en la suma directa de subespacios (uno o varios) lineales invariantes, cada uno de los cuales contiene sólo una recta invariante y, por lo tanto (conforme al problema anterior), en lo sucesivo es indescomponible.

1523*. Sean φ una transformación lineal del espacio R_n y $g(\lambda)$ un polinomio mínimo de φ. Demostrar que:

a) si $g(\lambda) = h(\lambda)\,k(\lambda)$ y los polinomios $h(\lambda)$ y $k(\lambda)$ son primos entre sí, el espacio R_n es la suma directa de los subespacios L_1 que consta de todos los vectores x, tales que $h(\lambda)\,x = 0$, y L_2 que consta de todos los vectores x, tales que $k(\lambda)\,x = 0$;

b) si $g(\lambda) = h_1(\lambda)\,h_2(\lambda)\,\ldots\,h_s(\lambda)$ y los polinomios $h_1(\lambda)$, $h_2(\lambda), \ldots, h_s(\lambda)$ son primos entre sí de dos en dos, el espacio R_n es una suma directa de los subespacios L_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$, donde L_i consta de todos los vectores x, tales que $h_i(\lambda)\,x = 0$.

1524*. La transformación lineal φ en la base e_1, e_2, e_3 se prefija mediante la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hallar el polinomio mínimo $g(\lambda)$ de esta transformación y la descomposición del espacio en una suma directa de los subespacios, correspondiente a la descomposición de $g(\lambda)$ en factores primos entre sí tipo $(\lambda - \alpha)^k$.

1525. Resolver un problema semejante al anterior, si la transformación lineal φ en la base e_1, e_2, e_3 se prefija mediante la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

1526. La transformación lineal φ de un espacio euclídeo (o unitario) R_n se prefija mediante la igualdad $\varphi x = (x, a)\,a$ para cualquier x perteneciente a R_n con la particularidad de que a es el vector no nulo dado. Hallar el polinomio mínimo $g(\lambda)$ de esa transformación y la descomposición del espacio en una suma directa, correspondiente a la descomposición de $g(\lambda)$ en potencias primas entre sí de polinomios irreducibles con coeficientes reales (o polinomios tipo $\lambda - \alpha$ en caso de un espacio unitario).

1527. Hallar la forma de Jordan de la matriz de una transforma-

ción lineal φ del espacio complejo R_n si φ posee sólo un vector propio, con la exactitud de hasta un factor numérico.

1528. Demostrar que la cantidad de vectores propios linealmente independientes de la transformación lineal φ, pertenecientes a un mismo valor propio de λ_0, es igual a la cantidad de células con elementos diagonales λ_0 en la forma de Jordan de la matriz φ.

1529*. Demostrar que la base, en la cual la matriz de la transformación lineal φ de un espacio vectorial complejo R_n tiene una forma de Jordan, puede construirse de la siguiente manera:

A) Si no todos los valores propios de φ son iguales entre sí y el polinomio característico tiene el aspecto

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{k_s} \quad (\lambda_i \neq \lambda_j \quad \text{para} \quad i \neq j),$$

construimos la base del subespacio P_i de todos los vectores x, tales que $(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{k_i} x = 0$ (ε es una transformación idéntica, $i = 1, 2, \ldots, s$).

El espacio R_n será una suma directa de los subespacios P_i. Éstos son invariantes con respecto a φ; φ en P_i tiene un valor propio de λ_i con la particularidad de que $(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{k_i} x = 0$ para cualquier vector x de P_i. En esta construcción puede tomarse en vez del polinomio característico $f(\lambda)$, el polinomio mínimo $g(\lambda)$, lo que puede reducir los exponentes de la potencia k_i.

B) Supongamos que φ en R_n tiene el único valor propio de λ_0 y k es el mínimo número positivo entero, tal que $(\varphi - \lambda_0\varepsilon)^k = 0$. Pongamos $\psi = \varphi - \lambda_0\varepsilon$. Se denomina *altura* de un vector x el mínimo h, tal que $\psi^h x = 0$. Designemos el subespacio de todos los vectores de altura $\leqslant h$ $(0 \leqslant h \leqslant k)$ por R_h. R_0 contiene sólo el vector nulo; R_k coincide con todo el espacio.

Construimos la base de R_1, la completamos hasta la base de R_2, la base obtenida la completamos hasta la base de R_3, etc., hasta que obtengamos la base de R_k (con fin de abreviar, denominaremos estas bases iniciales). Para cada vector f de altura k de una base inicial de R_k construimos una *serie* de vectores $f, \psi f, \psi^2 f, \ldots, \psi^{k-1} f$ con el vector inicial f. Tomamos cualquier base (por ejemplo, la inicial) de R_{k-2} y los vectores de altura $k - 1$ de todas las series construidas. Juntos estos vectores serán linealmente independientes. Los completamos hasta la base de R_{k-1} mediante cualesquiera vectores (por ejemplo, de la base inicial de R_{k-1}). Para cada uno de los vectores f, tomados complementariamente (si éstos existen en general), construimos una serie nueva: $f, \psi f, \psi^2 f, \ldots, \psi^{k-2} f$, etc.

Supongamos que en un cierto paso ya se han construido las series, en las cuales los vectores de altura $h + 1$ junto con cualquier base de R_h (por ejemplo, la inicial), forman la base de R_{h+1}. Los vectores de cualquier base de R_{h-1} (por ejemplo, con la inicial) junto con los vectores de altura h de las series construidas serán linealmente independientes. Las completamos hasta la base de R_h mediante cualesquiera vectores (por ejemplo, pertenecientes a la base inicial de R_h). Para cada uno de los vectores f tomados complementariamente

(si existen en realidad) construimos una serie nueva: $f, \psi f, \psi^2 f, \ldots, \psi^{h-1} f$. Continuamos hasta que los vectores de todas las series construidas formen en total una base de todo el espacio. Después de escribir los vectores serie tras serie, de modo que en cada serie los vectores se toman en orden inverso (el vector inicial de la serie se toma como último en la serie dada), obtenemos la base buscada, en la cual la matriz de la transformación φ tiene la forma de Jordan.

C) La base, cuya construcción se da en los puntos A) y B), no está determinada unívocamente. Demostrar la unicidad (con la exactitud de hasta el orden de la disposición de las células de Jordan) de la matriz de Jordan A_J, semejante a la matriz cuadrada A dada (y por consiguiente, la unicidad de la forma de Jordan de la matriz de dicha transformación lineal φ). A saber: demostrar que la forma de Jordan A_J de la matriz A de orden n se determina de la siguiente manera. Sean k el orden máximo de las células de Jordan de la matriz A_J que tiene el número λ_0 en la diagonal, x_h el número de semejantes células de orden h ($h = 1, 2, \ldots, k$), $B = A - \lambda_0 E$, r_h el rango de la matriz B^h ($h = 0, 1, 2, \ldots, k, k+1$). Entonces los números x_h se determinan mediante las fórmulas

$$x_h = r_{h-1} - 2r_h + r_{h+1} \quad (h = 1, 2, \ldots, k) \qquad (\alpha)$$

Observación. Las fórmulas (α) nos dan el procedimiento para buscar la forma de Jordan A_J sin aplicar la teoría de divisores elementales de las λ-matrices.

La transformación lineal φ del espacio R_n en la base $e_1, \ldots, e_n$ está dado mediante la matriz A. Hallar la base $f_1, \ldots, f_n$, en la que la matriz de dicha transformación tiene la forma de Jordan A_J, y hallar esa forma de Jordan (la base buscada no está determinado unívocamente).

1530. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$. **1531.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1532. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 5 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$. **1533.** $A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

1534. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **1535.** $A = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1536. $A = B^2$, donde $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ es la célula de Jordan de orden n.

1537*. La transformación lineal φ del espacio R_n se denomina *involutiva* si $\varphi^2 = \varepsilon$, donde ε es una transformación idéntica. Aclarar el sentido geométrico de la transformación involutiva.

1538*. La transformación lineal φ del espacio R_n se denomina *idempotente* si $\varphi^2 = \varphi$. Aclarar el sentido geométrico de la transformación idempotente.

1539. Citar unos ejemplos de la transformación lineal φ de un espacio tridimensional, para la cual:

a) el espacio no es la suma directa del campo de valores de L_1 y del núcleo L_2 de la transformación φ (la definición se ofrece en el problema 1488);

b) el espacio es la suma directa del campo de valores de L_1 y del núcleo L_2 para φ, pero φ no es la proyección sobre L_1 paralelamente a L_2.

§ 19. Transformaciones lineales de los espacios vectoriales unitarios y euclídeos

1540. Demostrar que la operación del paso de una transformación lineal φ del espacio unitario (o euclídeo) a la transformación conjugada φ^* posee las siguientes propiedades:

a) $(\varphi^*)^* = \varphi$; b) $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$;

c) $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$; d) $(\alpha\varphi)^* = \bar{\alpha}\varphi^*$;

e) si φ es regular, $(\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1}$.

1541. Supongamos que e_1, e_2 es una base ortonormal de un plano y la transformación lineal φ en la base $f_1 = e_1, f_2 = e_1 + e_2$ tiene la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz de la transformación conjugada φ^* en la misma base f_1, f_2.

1542. La transformación lineal φ de un espacio euclídeo en la base de vectores $f_1 = (1, 2, 1)$, $f_2 = (1, 1, 2)$, $f_3 = (1, 1, 0)$ se prefija mediante la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Hallar la matriz de la transformación conjugada φ^* en la misma base, considerando que las coordenadas de los vectores de la base se dan en cierta base ortonormal.

1543. Hallar la matriz de la transformación lineal φ^* conjugada de la transformación φ en una base ortonormal e_1, e_2, e_3 si φ pasa los vectores $a_1 = (0, 0, 1)$, $a_2 = (0, 1, 1)$, $a_3 = (1, 1, 1)$ a los vectores $b_1 = (1, 2, 1)$, $b_2 = (3, 1, 2)$ y $b_3 = (7, -1, 4)$, respectivamente, donde las coordenadas de todos los vectores se dan en la base e_1, e_2, e_3.

1544. Sean xOy un sistema rectangular de coordenadas en el plano y φ la proyección del plano sobre el eje Ox paralelamente a la bisectriz del primero y tercer cuadrante. Hallar la transformación conjugada φ^*.

1545*. Sean $R_n = L_1 + L_2$ una descomposición del espacio euclídeo (o unitario) en una suma directa de dos subespacios; φ la proyección de R_n sobre L_1 paralelamente a L_2; L_1^* y L_2^* los complementos ortogonales para L_1 y L_2, respectivamente; φ^* la transformación conjugada de φ. Demostrar que $R_n = L_1^* + L_2^*$ y que φ es la proyección de R_n sobre L_2^* paralelamente a L_1^*.

1546. Demostrar que si el subespacio L de un espacio unitario (o euclídeo) es invariante con respecto a la transformación lineal φ, el complemento ortogonal L^* es invariante a la transformación conjugada φ^*.

1547*. Demostrar que la transformación lineal φ del espacio unitario R_n tiene un subespacio invariante de cualquier número de dimensiones desde cero hasta n.

1548*. Demostrar que para cualquier transformación lineal φ del espacio unitario existe una base ortonormal, en la cual la matriz de esa transformación tiene una forma triangular (teorema de Schur).

1549. Escribir la ecuación de un plano, invariante a una transformación lineal φ, prefijada en cierta base ortonormal mediante la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & -23 & 17 \\ 11 & -43 & 30 \\ 15 & -54 & 37 \end{pmatrix}.$$

1550. Demostrar que si un mismo vector x es propio para la transformación lineal φ con el valor λ_1 y para la transformación conjugada φ^* con el valor λ_2, entonces $\lambda_1 = \overline{\lambda}_2$.

1551. Demostrar que si la transformación lineal φ de un espacio unitario R_n tiene los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, los números conjugados $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \ldots, \overline{\lambda}_n$ serán los valores propios de la transformación conjugada φ^*.

1552. Demostrar que los coeficientes correspondientes unos a otros de los polinomios mínimos de las transformaciones lineales conjugadas entre sí son mutuamente conjugados.

1553*. Supongamos que la transformación lineal φ de un espacio unitario (o euclídeo) en la base $e_1, \ldots, e_n$ posee una matriz A, y la transformación conjugada φ^* en la base recíproca (véase el problema 1417) $f_1, \ldots, f_n$, la matriz B. Demostrar que $B = \overline{A}'$ en el espacio unitario y $B = \bar{A}'$ en el espacio euclídeo.

1554*. Supongamos que el producto escalar (x, y) en cierta base se prefija mediante una forma bilineal f con la matriz U (en otras palabras, U es la matriz de Gram de los vectores de la base). Mostrar que la matriz A de una transformación lineal φ y la matriz A_1 de la transformación conjugada φ^* en dicha base se relacionan de la si-

guiente manera:

a) $A_1 = U^{-1}A'U$ para el espacio euclídeo;

b) $\overline{A}_1 = U^{-1}A'U$ para el espacio unitario.

Supongamos que en cierta base el producto escalar se prefija mediante la forma bilineal f y la transformación lineal φ mediante la matriz A. Hallar la matriz A_1 de la transformación conjugada φ^* en la misma base:

1555. $f = x_1y_1 + 5x_2y_2 + 6x_3y_3 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2$;

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1556. $f = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$;

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sean U la matriz de Gram de cierta base y A una matriz de la transformación φ. Hallar la matriz A_1 de la transformación conjugada φ^* en la misma base:

1557. $U=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1558. $U=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1559. Sea φ una transformación lineal del espacio euclídeo o unitario. Demostrar que $(e^{\varphi})^* = e^{\varphi^*}$. (La definición de la función con respecto a la transformación lineal se da en el problema 1464.)

1560. Demostrar que el producto de dos transformaciones ortogonales (unitarias, respectivamente) es ortogonal (unitario).

1561. Demostrar que si la transformación lineal φ de un espacio unitario (o euclídeo) conserva las longitudes de todos los vectores, ella es unitaria (ortogonal, respectivamente).

1562*. Supongamos que en un espacio unitario (o euclídeo) se prefija cierta transformación φ, en virtud de la cual a cada vector x le corresponde el único vector φx. Demostrar que si la transformación φ conserva el producto escalar, o sea, $(\varphi x, \varphi y) = (x, y)$ para cualesquiera vectores x, y del espacio, φ será una transformación lineal y, por lo tanto, unitaria (ortogonal, respectivamente). Mostrar en ejemplos que la conservación de los cuadrados escalares de todos los vectores es insuficiente para que φ sea lineal.

1563. Supongamos que la multiplicación escalar de los vectores del espacio R_n se prefija mediante la matriz de Gram U de vectores de cierta base. Hallar la condición, necesaria y suficiente, para que

la transformación lineal φ, prefijada en la misma base mediante la matriz A, sea:

a) ortogonal de un espacio euclídeo;

b) unitaria para un espacio unitario.

1564. Demostrar que si dos vectores x, y de un espacio euclídeo (o unitario) tienen la misma longitud, existe una transformación ortogonal (unitaria, respectivamente) que hace pasar x a y.

1565. Demostrar que si dos pares de vectores x_1, x_2 e y_1, y_2 de un espacio euclídeo (o unitario) poseen las propiedades $|x_1| = |y_1|$, $|x_2| = |y_2|$ y el ángulo entre x_1 y x_2 es igual al ángulo entre y_1 e y_2, existe una transformación ortogonal (unitaria, respectivamente) φ, tal que $\varphi x_1 = y_1$, $\varphi x_2 = y_2$.

1566*. Supongamos que se dan dos sistemas de vectores $x_1, \ldots, x_k$ e $y_1, \ldots, y_k$ de un espacio euclídeo (o unitario). Demostrar la afirmación: para que exista una transformación ortogonal (unitaria, respectivamente) φ, tal que $\varphi x_i = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, es necesario y suficiente que la matrices de Gram de ambos sistemas de vectores coincidan: $((x_i, x_j))_1^k = ((y_i, y_j))_1^k$.

1567*. Sea φ una transformación unitaria (u ortogonal) de un espacio unitario (euclídeo, respectivamente) R_n. Demostrar que el complemento ortogonal L^* al subespacio lineal L, invariante con respecto a φ, también es invariante a φ.

1568. Demostrar que dos transformaciones unitarias conmutativas de un espacio unitario poseen una base ortonormal común de vectores propios.

1569*. Demostrar que para la transformación unitaria φ de un espacio unitario:

a) los valores propios, según el módulo, son iguales a la unidad (y, por lo tanto, los números característicos de una matriz unitaria, en particular, ortogonal real, según el módulo, son iguales a la unidad);

b) los vectores propios, pertenecientes a dos distintos valores propios, son ortogonales;

c) si en cierta base la matriz A de la transformación φ es real y el vector propio, perteneciente al valor propio complejo $\alpha + \beta i$ $(\beta \neq 0)$, se representa en forma de $x + yi$, donde los vectores x e y tienen coordenadas reales, x e y son ortogonales y tienen una misma longitud con la particularidad de que

$$\varphi x = \alpha x - \beta y; \quad \varphi y = \beta x + \alpha y; \tag{1}$$

d) la transformación ortogonal de un espacio euclídeo siempre posee un subespacio invariante unidimensional o bidimensional.

1570*. Demostrar que:

a) para cualquier transformación unitaria φ de un espacio unitario R_n existe una base ortonormal que consta de vectores propios de la transformación φ. En esta base la matriz de φ es diagonal con elementos diagonales, iguales a la unidad, según el módulo.

¿Qué propiedad de las matrices unitarias se desprende de aquí?

b) para cualquier transformación ortogonal φ de un espacio euclídeo R_n existe una base ortonormal, en la cual la matriz de φ tiene una forma canónica, donde en la diagonal principal se encuentran las células de segundo orden tipo

$$\begin{pmatrix} \cos\gamma & -\operatorname{sen}\gamma \\ \operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} (\gamma \neq k\pi)$$

y las células de primer orden tipo (± 1).

Las células de alguno de esos tipos pueden estar ausentes. Todos los demás elementos son nulos. ¿Cuál es el sentido geométrico de la transformación? ¿Qué propiedad de las matrices ortogonales reales se desprende de aquí?

Para la transformación ortogonal φ, prefijada en una base ortonormal mediante la matriz A, hallar una base ortonormal, en la que la matriz B de esa transformación tiene la forma canónica, indicada en el problema 1570. Hallar la forma canónica. (La base buscada no está determinada unívocamente.)

1571.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

1572.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

1573.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{6}\sqrt{2} & \frac{2}{3}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Hallar la forma canónica B de una matriz ortogonal A y la matriz ortogonal Q, tal que $B = Q^{-1}AQ$:

1574.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

1575.

$$A=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4}\sqrt{6} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1576.

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1577.

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1578. Para la matriz unitaria dada

$$A=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix}$$

hallar la matriz diagonal B y la matriz unitaria Q, tales que

$$B=Q^{-1}AQ.$$

1579. Demostrar que la combinación lineal de las transformaciones autoconjugadas con coeficientes reales (por ejemplo, la suma de dos transformaciones autoconjugadas) es una transformación autoconjugada.

1580. Demostrar que el producto $\varphi\psi$ de dos transformaciones autoconjugadas φ y ψ será autoconjugado cuando, y sólo cuando, φ y ψ son conmutativas.

1581. Demostrar que si φ y ψ son transformaciones conjugadas, las transformaciones

$$\varphi\psi+\psi\varphi \quad \text{e} \quad i(\varphi\psi-\psi\varphi)$$

también serán autoconjugadas.

1582. Demostrar que la reflexión φ de un espacio euclídeo (o unitario) R_n en el subespacio L_1 paralelamente a L_2 será una transformación lineal autoconjugada cuando, y sólo cuando, L_1 y L_2 son ortogonales.

1583. Demostrar que la proyección φ de un espacio euclídeo (o unitario) R_n sobre el subespacio L_1 paralelamente al subespacio L_2 será una transformación lineal autoconjugada, cuando, y sólo cuando, L_1 y L_2 son ortogonales.

1584. Demostrar que si la transformación lineal φ de un espacio unitario (o euclídeo) R_n posee cualesquiera dos de las siguientes tres propiedades:

1) φ es una transformación autoconjugada;

2) φ es una transformación unitaria (ortogonal, respectivamente);

3) φ es una transformación involutiva, o sea, $\varphi^2 = \varepsilon$ es una transformación idéntica, ella posee también la tercera propiedad. Hallar todos los tipos de transformaciones que poseen todas esas propiedades.

Hallar la base ortonormal de vectores propios y la matriz B en esa base para una transformación lineal, prefijada en cierta base ortonormal mediante la matriz A (la base buscada no se determina unívocamente):

1585. $A=\begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$.

1586. $A=\begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$. 1587. $A=\begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Para la matriz A dada hallar una matriz diagonal B y unitaria C, tales que $B = C^{-1}AC$.

1588. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}$. 1589. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{pmatrix}$

1590*. Examinemos un espacio n^2-dimensional de todas las matrices cuadradas complejas de orden n que poseen las corrientes operaciones de adición de las matrices y la multiplicación de la matriz por un número. Transformemos este espacio en unitario, considerando que el producto escalar de dos matrices $A = (a_{ij})_1^n$ y $B = (b_{ij})_1^n$ se prefija mediante la igualdad $(AB) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\bar{b}_{ij}$.

Demostrar que:

a) la multiplicación de todas las matrices a la izquierda por una misma matriz C es una transformación lineal;

b) las matrices unitarias como vectores del espacio señalado, tienen una longitud de $\sqrt{n}$;

c) la multiplicación de todas las matrices a la izquierda por las matrices traspuestas-conjugadas C y $\bar{C}'$ originan transformaciones conjugadas;

d) la multiplicación a la izquierda por una matriz unitaria C origina una transformación unitaria;

e) la multiplicación por una matriz hermitiana origina una transformación autoconjugada;

f) la multiplicación por una matriz antihermitiana origina una transformación antisimétrica.

1591. Supongamos que la multiplicación escalar de los vectores en un espacio R_n se prefija mediante la matriz de Gram U en cierta base. Hallar la condición, necesaria y suficiente, para que la transformación lineal φ, prefijada en la misma base mediante la matriz A, sea autoconjugada en el caso: a) de un espacio euclídeo, b) unitario.

1592*. Demostrar que dos transformaciones autoconjugadas φ y ψ de un espacio unitario (o euclídeo) R_n tienen una base ortonormal común de vectores propios de ambas transformaciones cuando, y sólo cuando, éstas son conmutativas. ¿Qué propiedad de las formas cuadráticas y de las superficies de segundo grado se deduce de aquí?

1593. Sea R un espacio euclídeo de dimensión n^2, cuyos vectores son todas las matrices reales de orden n con operaciones corrientes de la adición de matrices y la multiplicación de la matriz por un número, y el producto escalar de las matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ se determina mediante la igualdad $(AB) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$. Prosiguiendo, supongamos que P y Q son matrices simétricas reales de orden n.

Demostrar que las transformaciones lineales $\varphi X = PX$ y $\psi X = XQ$ (X es cualquier matriz del espacio R) son transformaciones autoconjugadas conmutativas del espacio R y hallar el enlace entre la base ortonormal común de vectores propios de las transformaciones φ y ψ y las bases ortonormales de vectores propios de las matrices P y Q.

1594. La transformación lineal autoconjugada φ de un espacio unitario (o euclídeo) R_n se denomina determinada positiva si $(\varphi x, x) > 0$, y se llama no negativa si $(\varphi x, x) \geqslant 0$ para cualquier vector $x \neq 0$ perteneciente a R_n. Demostrar que la transformación autoconjugada φ es determinada positiva (o no negativa) cuando, y sólo cuando, todos sus valores propios son positivos (no negativos, respectivamente). Mostrar que para cualquier transformación lineal (y no sólo para la autoconjugada) φ de $(\varphi x, x) > 0$ (ó $\geqslant 0$) se desprende que todos los valores propios de φ son positivos (no negativos, respectivamente). Dar un ejemplo que muestre que la afirmación contraria para la transformación lineal autoconjugada puede ser incorrecta.

1595*. Demostrar que si $\varphi = \psi\chi$ ó $\varphi = \chi\psi$, donde φ y ψ son transformaciones lineales autoconjugadas con valores propios positivos y χ una transformación unitaria, $\varphi = \psi$ y χ es una transformación idéntica (véase el problema 1276, c).

1596*. Demostrar que cualquier transformación lineal regular φ de un espacio unitario (o euclídeo) se representa tanto en forma de

$\varphi = \psi_1\chi_1$, como también en forma de $\varphi = \psi_2\chi_2$, donde ψ_1, ψ_2 son transformaciones autoconjugadas con valores propios positivos y χ_1, χ_2 son transformaciones unitarias (ortogonales, respectivamente) con la particularidad de que ambas representaciones indicadas son únicas.

1597. ¿Por qué las igualdades

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

no contradicen a la unicidad de la representación, indicada en el problema anterior?

Representar las siguientes matrices en forma de un producto de una matriz simétrica con números característicos positivos por una matriz ortogonal:

1598. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. **1599.** $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. **1600.** $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

1601. Demostrar que la transformación lineal autoconjugada φ es determinada positiva cuando, y sólo cuando, los coeficientes de su polinomio característico $\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_n$ son todos distintos de cero y tienen signos alternativos, y es no negativa (es decir, con los valores propios no negativos) cuando, y sólo cuando, los coeficientes $c_0 = 1$, c_1, c_2, ..., c_k son distintos de cero y tienen signos alternativos, mientras que c_{k+1}, ..., c_n son nulos. Aquí k es cualquier número desde 0 hasta n.

1602*. Demostrar que si φ y ψ son transformaciones autoconjugadas y φ es determinada positiva, los valores propios de la transformación $\varphi\psi$ son reales.

1603*. Demostrar que si φ y ψ son transformaciones autoconjugadas con valores propios no negativos, con la particularidad de que una de ellas es regular, los valores propios de la transformación $\varphi\psi$ son reales y no negativos.

1604. Demostrar que la suma de dos o varias transformaciones autoconjugadas no negativas (véase el problema 1594) es de nuevo una transformación autoconjugada no negativa.

1605*. Demostrar que una transformación autoconjugada no negativa de rango r es la suma de r transformaciones autoconjugadas no negativas de rango 1.

1606*. Demostrar que la transformación lineal φ de un espacio unitario R_n que posee el rango igual a la unidad, será autoconjugada no negativa cuando, y sólo cuando, en cualquier base ortonormal su matriz se representa en forma de $\overline{X}'X$, donde X es una fila de n números.

1607*. Demostrar que si las matrices $A = (a_{ij})_1^n$ y $B = (b_{ij})_1^n$ son hermitianas y no negativas (es decir, tienen valores propios no negativos), también la matriz $C = (c_{ij})_1^n$, donde $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$ (i, j =

$= 1, 2, \ldots, n$), es hermitiana y no negativa (compárese con el problema 1220).

1608. La transformación lineal φ de un espacio euclídeo (o unitario) R_n se denomina antisimétrica si $\varphi^* = -\varphi$, donde φ^* es una transformación conjugada con φ. Demostrar que:

a) para que la transformación lineal φ del espacio euclídeo sea antisimétrica es necesario y suficiente que su matriz A sea antisimétrica en cualquier base ortonormal, o sea, $A' = -A$;

b) para que la transformación lineal φ del espacio unitario sea antisimétrica es necesario y suficiente que su matriz A sea antihermitiana en cualquier base ortonormal, o sea, $\bar{A}' = -A$.

1609*. Demostrar que el complemento ortogonal L^* al subespacio L del espacio euclídeo (o unitario) invariante con relación a la transformación antisimétrica φ, es también invariante con respecto a φ.

1610*. Demostrar que para la transformación antisimétrica φ de un espacio unitario:

a) los valores propios son imaginarios puros (y, por lo tanto, los números característicos de una matriz antihermitiana, por ejemplo, antisimétrica real, son imaginarios puros);

b) los vectores propios, pertenecientes a dos distintos valores propios, son ortogonales;

c) si en una base ortonormal la matriz A de la transformación φ es real y el vector propio, perteneciente al valor $\beta i \neq 0$, se representa en forma de $x + yi$, donde los vectores x e y tienen coordenadas reales, x e y son ortogonales y son de la misma longitud, con la particularidad de que

$$\varphi x = -\beta y, \quad \varphi y = \beta x; \tag{1}$$

d) la transformación antisimétrica de un espacio euclídeo posee siempre un subespacio invariante uni- o bidimensional.

1611*. Demostrar que:

a) para cualquier transformación antisimétrica φ de un espacio unitario R_n existe una base ortonormal que consta de vectores propios de la transformación φ. En esta base la matriz φ es diagonal con elementos imaginarios puros en la diagonal (con la particularidad de que algunos de estos elementos pueden ser nulos). ¿Qué propiedad de las matrices antihermitianas complejas se desprende de aquí?

b) para cualquier transformación antisimétrica φ de un espacio euclídeo R_n existe una base ortonormal, en la cual la matriz tiene la siguiente forma canónica: en la diagonal principal se encuentran las células de segundo orden tipo $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$, donde $\beta \neq 0$, y las células nulas de primer orden (las células de uno de estos tipos pueden estar ausentes). ¿Cuál es el sentido geométrico de la transformación y qué propiedad de las matrices antisimétricas reales se desprende de aquí?

1612. Demostrar que si φ es una transformación autoconjugada

del espacio unitario, la transformación $\psi = i\varphi$ es antisimétrica, viceversa, si φ es una transformación antisimétrica, $\psi = i\varphi$ es una transformación autoconjugada.

1613. Demostrar que si φ es una transformación autoconjugada del espacio unitario, la transformación $\psi = (\varphi - i\varepsilon)^{-1} (\varphi + i\varepsilon)$, donde ε es una transformación idéntica, la cual existe y es unitaria.

1614*. Demostrar que las transformaciones unitarias y antisimétricas de un espacio unitario (y, correspondientemente, las transformaciones ortogonales y antisimétricas de un espacio euclídeo) están relacionadas de la siguiente manera: si en la igualdad

$$\psi = (\varepsilon - \varphi)(\varepsilon + \varphi)^{-1} \tag{1}$$

(donde ε es una transformación idéntica) φ es una transformación antisimétrica, ψ será una transformación unitaria que no tiene el número -1 como valor propio, viceversa, si en la misma igualdad (1) φ es una transformación unitaria que no tiene el número -1 como valor propio, ψ será una transformación antisimétrica. La igualdad (1) determina una aplicación biunívoca de todas las transformaciones antisimétricas sobre todas las transformaciones unitarias que no tienen el número -1 como valor propio. Entre las transformaciones ortogonales y antisimétricas de un espacio euclídeo también existe semejante relación. ¿Qué propiedades de las matrices se desprenden de aquí?

1615. Mostrar que la igualdad (1) del problema anterior define la correspondencia biunívoca, primero, entre todas las transformaciones antisimétricas regulares y todas las unitarias (ortogonales, respectivamente) sin valores propios de ± 1, y, segundo, entre todas las transformaciones antisimétricas degeneradas y todas las unitarias (ortogonales) con valores propios de $+1$, pero sin el valor propio de -1.

1616. Demostrar que si φ es una transformación antisimétrica de un espacio unitario (o euclídeo), la transformación e^{φ} es unitaria (ortogonal, respectivamente). ¿Qué propiedad de las matrices se deduce de aquí?

1617*. Demostrar que la función e^{φ} origina una aplicación biunívoca de todas las transformaciones autoconjugadas de un espacio unitario (o euclídeo) sobre todas las transformaciones determinadas positivamente (o sea, autoconjugadas con valores propios positivos).

1618. La transformación lineal φ de un espacio unitario (o euclídeo) se denomina normal si es conmutativo con la transformación φ^* conjugada con la primera. Comprobar si las transformaciones unitarias (u ortogonales), antisimétricas y autoconjugadas son normales.

1619. Demostrar que la transformación normal de un espacio unitario (o euclídeo) es autoconjugada cuando, y sólo cuando, todos sus valores propios (correspondientemente, todas las raíces de su ecuación característica) son reales.

1620. Demostrar que la transformación normal de un espacio unitario (o euclídeo) es unitaria (ortogonal, respectivamente) si,

y sólo si, todos sus valores propios (correspondientemente, todas las raíces de su ecuación característica) son iguales a la unidad, según el módulo.

1621. Demostrar que la transformación normal de un espacio unitario (o euclídeo) es antisimétrico, cuando, y sólo cuando, todos sus valores propios (correspondientemente, todas las raíces de su ecuación característica) son imaginarios puros.

1622. Demostrar que la transformación lineal φ de un espacio unitario es normal cuando, y sólo cuando, $\varphi = \psi\chi$, donde ψ es una transformación autoconjugada y χ, unitaria, ambas conmutativas entre sí.

1623. Demostrar que:

a) cada transformación lineal φ se representa unívocamente en la forma $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, donde φ_1 es una transformación autoconjugada y φ_2, antisimétrica;

b) para que la transformación φ sea normal es necesario y suficiente que las transformaciones φ_1 y φ_2 sean conmutativas en la representación señalada antes.

1624. Demostrar que:

a) cada transformación lineal φ de un espacio unitario se representa unívocamente en la forma $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, donde φ_1 y φ_2 son transformaciones autoconjugadas;

b) para que la transformación φ sea normal es necesario y suficiente que las transformaciones φ_1 y φ_2 sean conmutativas en la representación señalada antes.

1625*. Demostrar que para cualquier conjunto (finito o infinito) de transformaciones normales conmutativas de dos en dos de un espacio unitario R_n existe una base ortonormal, cuyos vectores son propios para todas las transformaciones de dicho conjunto.

1626. Demostrar que en el dominio de transformaciones normales de cualquier transformación normal φ de un espacio unitario R_n puede extraerse la raíz de k-ésimo grado para cualquier número natural k. Hallar el número de diferentes transformaciones normales ψ, tales que $\psi^k = \varphi$.

1627*. Demostrar que si x es un vector propio de la transformación normal φ de un espacio unitario (o euclídeo), perteneciente al valor propio de λ, x será el vector propio de la transformación conjugada φ^*, perteneciente al número $\bar{\lambda}$ conjugado (al mismo, respectivamente).

1628*. Demostrar que los vectores propios de una transformación normal, pertenecientes a dos distintos valores propios, son ortogonales.

1629*. Sea e un vector propio de la transformación normal φ. Demostrar que el subespacio L compuesto por todos los vectores del espacio, ortogonales a e, es invariante con respecto a φ.

1630*. Demostrar que para que la transformación lineal φ del espacio unitario sea normal es necesario y suficiente que cada vector propio de φ sea propio también para φ^*.

1631*. Demostrar que cualquier subespacio L de un espacio unitario R_n, invariante con respecto a la transformación normal φ, posee una base ortonormal que consta de vectores propios de la transformación φ.

1632*. Se dice que la transformación lineal φ de un espacio unitario (o euclídeo) R_n posee una *propiedad normal* si el complemento ortogonal L^* para cada subespacio L, invariante a φ, es también invariante con relación a φ. Demostrar la afirmación: para que la transformación lineal φ de un espacio unitario (o euclídeo) sea normal es necesario y suficiente que φ posea la propiedad normal.

1633*. Demostrar que para que la transformación lineal φ del espacio unitario (o euclídeo) sea normal es necesario y suficiente que cada subespacio, invariante a φ, sea invariante también con relación a φ^*.

ANEXO

§ 20. Grupos

1634. Aclarar si cada uno de los siguientes conjuntos forma un grupo al realizar la operación indicada sobre los elementos:

1) números enteros con respecto a la adición;

2) números pares con respecto a la adición;

3) números enteros, múltiples a un número natural n dado, con respecto a la adición;

4) potencias de un número real a dado, $a \neq 0, \pm 1$, con índices enteros con respecto a la multiplicación;

5) números enteros no negativos con respecto a la adición;

6) números enteros impares con respecto a la adición;

7) números enteros con respecto a la resta;

8) números racionales con respecto a la adición;

9) números racionales con respecto a la multiplicación;

10) números racionales, distintos de cero, con respecto a la multiplicación;

11) números racionales positivos con respecto a la multiplicación;

12) números racionales positivos con respecto a la división;

13) números racionales binarios, es decir, números racionales, cuyos denominadores son potencias del número 2 con índices enteros no negativas, con respecto a la adición;

14) todos los números racionales, cuyos denominadores son iguales a los productos de los números primos de dicho conjunto M (finito o infinito) con índices enteros no negativos (sólo un número finito de estos índices puede diferir de cero), con respecto a la adición;

15) las raíces de n-ésimo grado de la unidad (tanto reales, como complejas) con respecto a la multiplicación;

16) las raíces de todos los grados positivos enteros de la unidad con respecto a la multiplicación;

17) matrices de orden n con elementos reales con relación a la multiplicación;

18) matrices regulares de orden n con elementos reales con respecto a la multiplicación;

19) matrices de orden n con elementos enteros con respecto a la multiplicación;

20) matrices de orden n con elementos enteros y un determinante igual a la unidad, con respecto a la multiplicación;

21) matrices de orden n con elementos enteros y un determinante igual a ± 1, con respecto a la multiplicación;

22) matrices de orden n con elementos reales con respecto a la adición;

23) sustituciones de los números 1, 2, . . ., n con respecto a la multiplicación;

24) sustituciones pares de los números 1, 2, . . ., n con respecto a la multiplicación;

25) sustituciones impares de los números 1, 2, . . ., n con relación a la multiplicación;

26) aplicaciones biunívocas del conjunto $N = \{1, 2, 3, \ldots,\}$ de números naturales sobre sí mismo, cada uno de los cuales desplaza sólo una cantidad finita de números, si en calidad de producto de las aplicaciones s y t se toma la aplicación st que se obtiene, efectuando sucesivamente las aplicaciones s y t;

27) transformaciones del conjunto M, o sea, las aplicaciones biunívocas de este conjunto sobre sí mismo, si a título del producto de las transformaciones s y t se toma la transformación st que se obtiene efectuando sucesivamente las transformaciones s y t;

28) vectores de un espacio lineal n-dimensional $\boldsymbol{R}_n$ con respecto a la adición;

29) traslaciones paralelas de un espacio tridimensional $\boldsymbol{R}$ si en calidad del producto de las traslaciones s y t se toma su ejecución sucesiva;

30) giros de un espacio tridimensional $\boldsymbol{R}$ alrededor de un punto dado O si en calidad del producto de los giros s y t se toma su realización sucesiva;

31) todos los movimientos de un espacio tridimensional $\boldsymbol{R}$ si en calidad del producto de los movimientos s y t se toma el movimiento st que se obtiene efectuando sucesivamente los movimientos s y t;

32) números reales positivos si la operación se define como: $a*b = a^b$;

33) números reales positivos si la operación se define de este modo: $a * b = a^2b^2$;

34) polinomios reales de grado $\leqslant n$ (incluyendo el cero) de una indeterminada x con respecto a la adición;

35) polinomios reales de grado n de una indeterminada x con respecto a la adición;

36) polinomios reales de cualesquiera grados n (incluyendo el cero) de la indeterminada x con respecto a la adición.

1635. Demostrar que un conjunto finito G en el cual se determina

una operación algebraica asociativa y cada una de las ecuaciones $ax = b$, $ya = b$ para cualesquiera a y b pertenecientes a G, tiene en G no más de una solución, será un grupo.

1636. Demostrar que si $a^2 = e$ para cualquier elemento a del grupo G, dicho grupo es abeliano.

1637*. Demostrar que el grupo de raíces de n-ésimo grado de la unidad es el único grupo multiplicativo de n-ésimo orden con elementos numéricos distinto de $\{0\}$.

1638*. Hallar todos los grupos (con una precisión de hasta el isomorfismo) de orden: a) tres; b) cuatro; c) seis. Escribir las tablas de multiplicación de estos grupos y representarlos en forma de grupos de sustituciones.

1639*. Mostrar que si los giros de cada uno de cinco poliedros regulares alrededor del centro, que hacen coincidir el poliedro consigo mismo, forman un grupo si en calidad de multiplicación de dos giros se toma su ejecución sucesiva. Hallar los órdenes de esos grupos.

1640. Demostrar que los grupos 1) — 4) del problema 1634 son isomorfos entre sí.

1641. Demostrar que:

a) todos los grupos cíclicos infinitos son isomorfos entre sí;

b) todos los grupos cíclicos finitos de orden n dado son isomorfos entre sí.

1642. Demostrar que:

a) el grupo de números reales positivos es isomorfo, según la multiplicación, al grupo de todos los números reales, según la adición;

b) el grupo de números racionales positivos no es isomorfo, según la multiplicación, al grupo de todos los números racionales, según la adición.

1643*. Demostrar que:

a) cualquier grupo finito de orden n es isomorfo a cierto grupo de sustituciones de n elementos;

b) cualquier grupo es isomorfo al grupo de algunas aplicaciones biunívocas del conjunto de elementos de ese grupo sobre sí.

1644. Demostrar que para cualesquiera elementos a, b, c del grupo G:

a) los elementos ab y ba tienen el mismo orden;

b) los elementos abc, bca y cab tienen el mismo orden.

1645. Demostrar que si e es una unidad y a es un elemento de orden n del grupo G, $a^k = e$ cuando, y sólo cuando, k se divide por n.

1646. Hallar todos los elementos generadores del grupo aditivo de los números enteros.

1647. Sean $G = \{a\}$ un grupo cíclico de orden n y $b = a^k$. Demostrar que:

a) el elemento b será generador del grupo G cuando, y sólo cuando, los números n y k son primos entre sí;

b) el orden del elemento b es igual a n/d, donde d es el máximo divisor común de n y k;

c) si n y k son primos entre sí, en G existe la raíz $\sqrt[k]{a}$, es decir, a es la k-ésima potencia de cierto elemento perteneciente a G y viceversa;

d) en un grupo de orden impar todos los elementos son cuadrados.

1648*. Demostrar las afirmaciones:

a) si los elementos a y b del grupo G son conmutativos, o sea,

$$ab = ba, \tag{1}$$

y tienen órdenes finitos r y s primos entre sí, su producto ab tiene el orden rs;

b) si los elementos a y b del grupo G son conmutativos, tienen órdenes finitos r y s y la intersección de sus subgrupos cíclicos contiene sólo la unidad e, es decir,

$$\{a\} \cap \{b\} = \{e\}, \tag{2}$$

entonces el orden del producto ab es igual al mínimo común divisor de r y s. Mostrar en ejemplos que cada una de las condiciones (1) y (2) por separado es insuficiente para la validez de la última afirmación, y que la condición (1) no es consecuencia de la condición (2), incluso para los órdenes primos entre sí de los elementos a y b;

c) si los órdenes r y s de los elementos a y b son primos entre sí, la condición (2) se cumple;

d) mostrar en un ejemplo que sin la condición (2) el orden del producto ab no se determina unívocamente mediante los órdenes de los factores a y b.

1649. ¿Cuáles de los grupos del problema 1634 son subgrupos de otros de esos grupos?

1650. Demostrar que:

a) si H es un conjunto finito de elementos del grupo G y el producto de dos elementos cualesquiera de H yace de nuevo en H, H será un subgrupo del grupo G;

b) si todos los elementos del conjunto H del grupo G tienen órdenes finitos y el producto de dos elementos cualesquiera pertenecientes a H yacen de nuevo en H, H será un subgrupo del grupo G.

1651. Demostrar que en cualquier grupo de sustituciones que contenga por lo menos una sustitución impar:

a) la cantidad de sustituciones pares es igual a la cantidad de impares;

b) las sustituciones pares forman un divisor normal;

c) todos los grupos elementales de sustituciones de n elementos de orden superior a 2 se encuentran en el grupo de signo variable A_n se denomina *elemental* el grupo que no tiene divisores normales a excepción de si mismo y del subgrupo unitario).

1652. Demostrar que cualquier grupo infinito tiene un número infinito de subgrupos.

1653. Hallar todos los grupos (con la precisión de hasta el iso-

morfismo), cada uno de los cuales es isomorfo a cualquiera de sus subgrupos no unitarios.

1654. Hallar todos los subgrupos:

a) del grupo cíclico de orden seis;

b) del grupo cíclico de orden 24;

c) del grupo cuádruple (problema 1638);

d) del grupo simétrico S_3.

e) ¿Cuáles de los subgrupos del grupo S_3 son divisores normales?

f) Demostrar que el grupo de signo variable de cuarto grado A_4 no tiene subgrupos de sexto orden. De este modo, el grupo G de orden n para ciertos k que dividen n, puede no tener subgrupos de orden k.

1655. Hallar todos los subgrupos del grupo G de orden ocho, todos los elementos del cual, a excepción de la unidad e, tienen orden dos.

1656. Sea $G = \{a\}$ un grupo cíclico finito de orden n. Demostrar las afirmaciones:

a) el orden de cualquier subgrupo del grupo G divide el orden n de dicho grupo;

b) para cualquier divisor d del número n existe el único subgrupo H del grupo G que tiene el orden d;

c) el subgrupo H de orden d contiene en calidad de generadores todos los elementos de orden d del grupo G. En particular,

$$H = \{a^{n/\alpha}\}.$$

1657*. Hallar todos los subgrupos del grupo cíclico primario, es decir, el grupo cíclico $G = \{a\}$ de orden p^k, donde p es un número primo.

1658*. Demostrar las afirmaciones:

a) el grupo simétrico S_n para $n > 1$ se engendra por el conjunto de todas las transposiciones (i, j);

b) el grupo simétrico S_n para $n > 1$ se engendra por las transposiciones: $(1, 2), (1, 3), \ldots, (1, n)$;

c) el grupo de signo variable A_n para $n > 2$ se engendra por un conjunto de todos los ciclos triples $(i\ j\ k)$;

d) el grupo de signo variable A_n para $n > 2$ se engendra por los ciclos triples: $(1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), \ldots, (1\ 2\ n)$.

1659. Hallar las clases contiguas:

a) de un grupo aditivo de números enteros mediante el subgrupo de números múltiples al número natural n dado;

b) de un grupo aditivo de los números reales mediante el subgrupo de números enteros;

c) de un grupo aditivo de números complejos mediante el subgrupo de números gausianos enteros, es decir, de los números $a + bi$, siendo a y b enteros;

d) del grupo aditivo de vectores en el plano (que salen del origen de coordenadas) mediante el subgrupo de vectores yacentes en el eje de abscisas Ox;

e) del grupo multiplicativo de números complejos, distintos de cero, mediante el subgrupo de números iguales a la unidad, según el módulo;

f) del grupo multiplicativo de números complejos, distintos de cero, mediante el subgrupo de números reales positivos;

g) del grupo multiplicativo de números complejos, distintos de cero, mediante el subgrupo de números reales;

h) del grupo simétrico S_n mediante el subgrupo de sustituciones que dejan el número n en su lugar.

1660*. Demostrar que:

a) el subgrupo H de orden k de un grupo finito G de orden $2k$ contiene los cuadrados de todos los elementos del grupo G;

b) el subgrupo H de índice dos de cualquier grupo G contiene los cuadrados de todos los elementos del grupo G.

1661*. Demostrar que para $n > 1$ el grupo de signo variable A_n es el único subgrupo de índice dos (es decir, que contiene la mitad de todos los elementos) en el grupo simétrico S_n. Citar un ejemplo de un grupo finito con varios subgrupos de índice dos.

1662*. Demostrar que:

a) el grupo del tetraedro es isomorfo al grupo de todas las sustituciones pares de cuatro elementos;

b) los grupos del cubo y octaedro son isomorfos al grupo de todas las sustituciones de cuatro elementos;

c) los grupos del dodecaedro e icosaedro son isomorfos al grupo de las sustituciones pares de cinco elementos. Véase la definición de los grupos de los poliedros en el problema 1639.

1663. Demostrar que cualquier subgrupo de índice dos es un divisor normal.

1664. Demostrar que el conjunto Z de todos los elementos del grupo G, cada uno de los cuales es conmutativo con todos los elementos de este grupo, es un divisor normal (el centro del grupo G).

1665. El elemento $aba^{-1}b^{-1}$ se denomina *conmutador de los elementos a y b* del grupo G. Demostrar que todos los conmutadores y sus productos (con cualquier cantidad finita de factores) forman un divisor normal K del grupo G (el conmutador de dicho grupo).

1666. Demostrar que en el grupo de todos los movimientos de un espacio tridimensional el elemento, $x^{-1}ax$, conjugado con el giro de a alrededor del punto P, es el giro alrededor de aquel punto Q, al que pasa el punto P durante el movimiento de x.

1667. Demostrar que la sustitución de $x^{-1}ax$, conjugada con la sustitución de a en el grupo de sustituciones, se obtiene usando la sustitución transformable de x a todos los números en el desarrollo de la sustitución de a en ciclos independientes.

1668*. Demostrar que:

a) el grupo cuádruple V (problema 1638) es un divisor normal de un grupo simétrico S_4;

b) el grupo-cociente S_4/V es isomorfo al grupo simétrico S_3.

1669*. Haciendo uso del problema 1667, hallar el número de

sustituciones del grupo simétrico S_n conmutativos con la sustitución s dada.

1670*. Demostrar que si la intersección de dos divisores normales H_1 y H_2 del grupo G contiene sólo la unidad e, cualquier elemento $h_1 \in H_1$ es conmutativo con cualquier elemento $h_2 \in H_2$.

1671. Demostrar que:

a) los elementos del grupo G, conmutativos con el elemento a dado, forman un subgrupo $N(a)$ del grupo G (normalizador de a en G) que contiene el subgrupo cíclico $\{a\}$ en calidad de divisor normal;

b) la cantidad de elementos del grupo G conjugados con a, es igual al índice del normalizador de $N(a)$ en G.

1672. Demostrar que:

a) Los elementos del grupo G conmutativos con el subgrupo H dado (pero no con los elementos de H obligatoriamente), forman un subgrupo $N(H)$ del grupo G (normalizador de H en G) que contiene el subgrupo H en calidad de divisor normal;

b) la cantidad de subgrupos del grupo G, conjugados con H, es igual al índice del normalizador $N(H)$ en G.

1673. Demostrar que los siguientes números dividen el orden del grupo:

a) el número de elementos del grupo G conjugados con el elemento dado;

b) el número de subgrupos del grupo G conjugados con el subgrupo dado.

1674. Haciendo uso de los problemas 1669 y 1671, hallar la cantidad de sustituciones del grupo simétrico S_n, conjugadas con la sustitución s dada.

1675*. Demostrar que: a) el centro Z del grupo G de orden p^n, donde p es un número primo, contiene más de un elemento; b) cualquier grupo de orden p^2, donde p es un número primo, es conmutativo.

c) Citar un ejemplo de un grupo no conmutativo de orden n^2, donde n es número compuesto.

d) Citar un ejemplo de un grupo no conmutativo de orden p^3, donde p es un número primo.

1676*. Demostrar que cualquier divisor normal H de un grupo de signo variable A_n de grado $n \geqslant 5$ que contiene por lo menos un ciclo triple, coincide con A_n.

1677*. a) Hallar todas las clases de los elementos conjugados del grupo icosaedro (problema 1639); b) demostrar que el grupo del icosaedro es primo (es decir, no tiene divisores normales distintos del mismo grupo y del subgrupo unitario).

1678*. Demostrar que el grupo de signo variable de quinto grado es elemental.

1679. Demostrar que el grupo G' es una imagen homomorfa de un grupo cíclico finito G cuando, y sólo cuando, G' es también cíclico y su orden divide el orden del grupo G.

1680. Demostrar que si el grupo G se aplica de modo homomorfo

sobre el grupo G', con la particularidad de que el elemento a perteneciente a G se aplica sobre a' de G', entonces:

a) el orden a se divide por el orden a';

b) el orden de G se divide por el orden de G'.

1681. Hallar todas las aplicaciones homomorfas:

a) del grupo cíclico $\{a\}$ de orden n sobre sí;

b) del grupo cíclico $\{a\}$ de orden 6 sobre el grupo cíclico $\{b\}$ de orden 18;

c) del grupo cíclico $\{a\}$ de orden 18 sobre el grupo cíclico $\{b\}$ de orden 6;

d) del grupo cíclico $\{a\}$ del orden 12 sobre el grupo cíclico $\{b\}$ de orden 15;

e) del grupo cíclico $\{a\}$ de orden 6 sobre el grupo cíclico $\{b\}$ de orden 25.

1682. Demostrar que al grupo aditivo de números racionales es imposible aplicarlo de modo homomorfo sobre el grupo aditivo de números enteros.

1683. La aplicación isomorfa del grupo G sobre sí se denomina *automorfismo* y la aplicación homomorfa sobre sí, *endomorfismo* de este grupo. El automorfismo φ se denomina *interior* si existe un elemento x perteneciente a G, tal que $a\varphi = x^{-1}ax$ para cualquier a de G, y *exterior*, en caso contrario. Todos los automorfismos del grupo G forman de por sí un grupo si se toma a título de producto de los automorfismos su ejecución sucesiva: $a(\varphi\psi) = (a\varphi)\psi$. Todos los endomorfismos del grupo abeliano G forman un anillo si la adición de los endomorfismos se determina mediante la igualdad $a(\varphi + \psi) = a\varphi + a\psi$, y la multiplicación del mismo modo que para los automorfismos. Hallar el grupo de automorfismos del grupo cíclico $\{a\}$ de orden: a) 5; b) 6.

c) Demostrar que el grupo simétrico S_3 tiene seis automorfismos interiores y ni uno exterior, con la particularidad de que el grupo de los automorfismos es isomorfo a S_3.

d) El grupo cuádruplo V (problema 1638) tiene un automorfismo interior (idéntico) y cinco exteriores, con la particularidad de que el grupo de automorfismos es isomorfo a S_3.

Hallar el anillo de endomorfismos del grupo cíclilo $\{a\}$ de orden: e) 5; f) 6; g) n.

1684. Demostrar que el grupo-cociente del grupo simétrico S_n según el grupo del signo variable A_n es isomorfo al grupo-cociente del grupo aditivo de números enteros según el subgrupo de números pares.

1685. Hallar los grupos-cocientes:

a) del grupo aditivo de números enteros según el subgrupo de números múltiples al número natural n dado;

b) del grupo aditivo de números enteros múltiples a 3, según el subgrupo de números, múltiples a 15;

c) del grupo aditivo de números enteros, múltiples a 4, según el subgrupo de números, múltiples a 24;

d) del grupo multiplicativo de números reales, distintos de cero, según el subgrupo de números positivos.

1686. Sean G_n un grupo aditivo de vectores de un espacio lineal n-dimensional y H_k un subgrupo del vectores del subespacio k-dimensional, $0 \leqslant k \leqslant n$. Demostrar que el grupo-cociente G_n/H_k es isomorfo a G_{n-k}.

1687. Sean G un grupo multiplicativo de todos los números complejos, distintos de cero, y H un conjunto de todos los números pertenecientes a G y yacentes en los ejes real e imaginario.

a) Demostrar que H es un subgrupo del grupo G.

b) Hallar las clases contiguas del grupo G según el subgrupo H.

c) Demostrar que el grupo-cociente G/H es isomorfo al grupo multiplicativo U de todos los números complejos iguales a la unidad según el módulo.

1688*. Sean G un grupo multiplicativo de números complejos, distintos de cero, H un conjunto de números pertenecientes a G y yacentes en los n rayos que salen del cero bajo ángulos iguales, con la particularidad de que uno de estos rayos coincide con el semieje real positivo, K un grupo aditivo de todos los números reales, Z un grupo aditivo de los números enteros, D un grupo multiplicativo de números positivos, U un grupo multiplicativo de números complejos, iguales a la unidad según el módulo y U_n un grupo multiplicativo de raíces de n-ésimo grado de la unidad. Demostrar que:

a) K/Z es isomorfo a U; b) G/D es isomorfo a U;

c) G/U es isomorfo a D; d) U/U_n es isomorfo a U;

e) G/U_n es isomorfo a G; f) H es un subgrupo del grupo G y G/H es isomorfo a U; g) H/D es isomorfo a U_n; h) H/U_n es isomorfo a D.

1689. Para los grupos multiplicativos de matrices cuadradas regulares de orden n demostrar las afirmaciones:

a) el grupo-cociente del grupo de matrices reales según el subgrupo de matrices con un determinante igual a 1, es isomorfo al grupo multiplicativo de números reales, distintos de cero;

b) el grupo-cociente del grupo de matrices reales según el subgrupo de matrices con un determinante igual a ± 1, es isomorfo al grupo multiplicativo de números positivos;

c) el grupo-cociente del grupo de matrices reales según el subgrupo de matrices con determinantes positivos, es un grupo cíclico de segundo orden;

d) el grupo-cociente del grupo de matrices complejas según el subgrupo de matrices con determinantes iguales a la unidad según el módulo, es isomorfo al grupo multiplicativo de números positivos;

e) el grupo-cociente del grupo de matrices complejas según el subgrupo de matrices con determinantes positivos es isomorfo al grupo multiplicativo de números complejos, iguales a la unidad según el módulo.

1690. Sean G un grupo de todos los movimientos de un espacio tridimensional, H un subgrupo de traslaciones paralelas, K un subgrupo de giros alrededor del punto O dado. Demostrar que:

a) H es divisor normal del grupo G y K no lo es;

b) el grupo-cociente G/H es isomorfo a K.

1691. Demostrar que el divisor normal H del grupo G con índice finito j contiene todos los elementos del grupo G, cuyos órdenes son primos entre sí con j. Mostrar en un ejemplo que para un subgrupo H que no es divisor normal, la afirmación puede ser incorrecta.

1692. Demostrar que el grupo-cociente G/H es conmutativo, cuando, y sólo cuando, H contiene el conmutador K del grupo G (problema 1665).

1693*. Demostrar que el grupo-cociente del grupo no conmutativo G según su centro Z (problema 1664) no puede ser cíclico.

1694*. Demostrar que si el orden de un grupo finito G se divide por un número primo p, G contiene el elemento de orden p (teorema de Cauchy).

1695*. Sea p un número primo. El grupo G se llama *p-grupo* (en el caso conmutativo, grupo *primario*) si los órdenes de todos sus elementos son finitos e iguales a ciertas potencias del número p. Demostrar que el grupo finito G será p-grupo cuando, y sólo cuando, su orden es igual a la potencia del número p.

1696. Demostrar que:

a) el grupo aditivo de vectores de un espacio lineal n-dimensional es una suma directa de n subgrupos de vectores de subespacios unidimensionales, tendidos sobre los vectores de cualquier base del espacio;

b) el grupo aditivo de números complejos es una suma directa de los subgrupos de números reales e imaginarios puros;

c) el grupo multiplicativo de números reales es una suma directa del producto del subgrupo de números positivos y del de los números ± 1;

d) el grupo multiplicativo de números complejos es un producto directo de los subgrupos de números positivos y los números iguales a la unidad, según el módulo.

1697. Demostrar que si $G = A + B_1 = A + B_2$ son desarrollos directos del grupo abeliano G y si B_1 contiene B_2, entonces $B_1 = B_2$.

1698. Demostrar que el subgrupo H del grupo abeliano G será sumando en el desarrollo directo de $G = H + K$ cuando, y sólo cuando, existe una aplicación homomorfa de G sobre H que conserva todos los elementos de H en su sitio.

1699. Demostrar que si $G = A + B$ es un desarrollo directo del grupo G, el grupo-cociente G/A es isomorfo a B.

1700. Sean $G = A_1 + A_2 + \ldots + A_s$ un desarrollo del grupo abeliano en una suma directa de los subgrupos y

$$x = a_1 + a_2 + \ldots + a_s,\ a_i \in A_i,\ i = 1, 2, \ldots, s,$$

un desarrollo correspondiente del elemento x en una suma de componentes.

Demostrar que:

a) el grupo G tiene un orden finito n cuando, y sólo cuando, cada

subgrupo A_i tiene un orden finito n_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, con la particularidad de que $n = n_1 n_2 \ldots n_s$;

b) el elemento x tiene un orden finito p cuando, y sólo cuando, su componente a_i tiene un orden finito p_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, con la particularidad de que p es igual al mínimo común múltiplo de los números $p_1, p_2, \ldots, p_s$;

c) el grupo G es cíclico finito cuando, y sólo cuando, todos los sumandos directos A_i son grupos cíclicos finitos, con la particularidad de que sus órdenes son primos entre sí de dos en dos.

1701. Desarrollar en una suma directa de los subgrupos cíclicos primarios el grupo cíclico $\{a\}$ de orden: a) 6; b) 12; c) 60; d) 900.

1702*. Demostrar el carácter indescomponible en una suma directa de dos subgrupos no nulos:

a) del grupo aditivo de números enteros;

b) del grupo aditivo de números racionales;

c) del grupo cíclico primario.

1703*. Sea G un grupo abeliano finito no nulo (con una anotación aditiva de la operación). Demostrar las afirmaciones:

a) si los órdenes de todos los elementos pertenecientes a G dividen el producto pq de los números primos entre sí p y q, G se desarrolla en una suma directa de los subgrupos A y B, donde los órdenes de todos los elementos de A dividen p, y los de B dividen q, con la particularidad de que uno de los subgrupos de A o de B puede resultar nulo;

b) para el grupo G existe el desarrollo $G = A_1 + A_2 + \ldots + A_s$ en una suma directa de subgrupos primarios (no nulos), pertenecientes a distintos números primos $p_1, p_2, \ldots, p_s$, respectivamente (los subgrupos A_i se denominan componentes primarias del grupo G);

c) la componente primaria A_i perteneciente a un número primo p_i, consta de todos los elementos del grupo G, cuyos órdenes son iguales a las potencias del número p_i, lo que determina unívocamente el desarrollo del grupo G en componentes primarias;

d) el desarrollo en componentes primarias de un subgrupo no nulo H del grupo G tiene la forma de $H = B_1 + B_2 + \ldots + B_s$, donde $B_i = H \cap A_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$, con la particularidad de que los subgrupos no nulos B_i en el desarrollo H se omiten.

1704. Designemos por $G(n_1, n_2, \ldots, n_s)$ la suma directa de los grupos cíclicos de órdenes $n_1, n_2, \ldots, n_s$, respectivamente. De la teoría de los grupos abelianos finitos se sabe que cada uno de estos grupos se representa unívocamente (con una precisión de hasta el isomorfismo) como $G(n_1, n_2, \ldots, n_s)$, donde los números n_i son iguales a las potencias de los números primos (pueden no ser obligatoriamente diferentes). Aplicando la designación indicada, hallar todos los grupos abelianos de órdenes: a) 3; b) 4; c) 6; d) 8; e) 9; f) 12; g) 16; h) 24; i) 30; j) 36; k) 48; l) 60; m) 63; n) 72; o) 100.

1705. Desarrollar en una suma directa de los subgrupos cíclicos infinitos y cíclicos primarios el grupo-cociente G/H, donde G es un

grupo abeliano libre con la base x_1, x_2, x_3 y H, el subgrupo con generatrices:

a) $y_1 = 7x_1 + 2x_2 + 3x_3,$
$y_2 = 21x_1 + 8x_2 + 9x_3,$
$y_3 = 5x_1 - 4x_2 + 3x_3;$

b) $y_1 = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3,$
$y_2 = 5x_1 + 6x_2 + 5x_3,$
$y_3 = 8x_1 + 7x_2 + 9x_3;$

c) $y_1 = 5x_1 + 5x_2 + 2x_3,$
$y_2 = 11x_1 + 8x_2 + 5x_3,$
$y_3 = 17x_1 + 5x_2 + 8x_3;$

d) $y_1 = 6x_1 + 5x_2 + 7x_3,$
$y_2 = 8x_1 + 7x_2 + 11x_3,$
$y_3 = 6x_1 + 5x_2 + 11x_3;$

e) $y_1 = 4x_1 + 5x_2 + x_3,$
$y_2 = 8x_1 + 9x_2 + x_3,$
$y_3 = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3;$

f) $y_1 = 2x_1 + 6x_2 - 2x_3,$
$y_2 = 2x_1 + 8x_2 - 4x_3,$
$y_3 = 4x_1 + 12x_2 - 4x_3;$

g) $y_1 = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3,$
$y_2 = 7x_1 + 6x_2 + 9x_3,$
$y_3 = 5x_1 + 4x_2 - 4x_3;$

h) $y_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3,$
$y_2 = 2y_1,$
$y_3 = 3y_1;$

i) $y_1 = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3,$
$y_2 = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3,$
$y_3 = 6x_1 + 10x_2 + 5x_3;$

k) $y_1 = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3,$
$y_2 = 5x_1 + 5x_2 + 6x_3,$
$y_3 = 2x_1 + 6x_2 + 9x_3.$

1706*. Demostrar que el grupo abeliano finito G, cuyo orden es igual a:

a) un producto de dos números primos diferentes p y q;

b) un producto de distintos números primos $p_1, p_2, \ldots, p_s$, es cíclico.

c) Hallar todos los subgrupos del grupo abeliano G, cuyo orden satisface la condición del punto b) y hallar la cantidad de esos subgrupos.

d) Demostrar que para cualquier divisor k de orden n de un grupo abeliano finito G existe un subgrupo y el grupo-cociente del grupo G de orden k.

1707*. Sea G un grupo abeliano finito no nulo, cuyos elementos no nulos tienen el mismo orden p (grupo elemental). Demostrar las afirmaciones:

a) el número p es primo;

b) el grupo G se desarrolla en una suma directa de una cantidad finita de subgrupos cíclicos de orden p y posee el orden p^k, donde k es la cantidad de esos sumandos;

c) cualquier subgrupo no nulo H del grupo G será por si mismo elemental y es un sumando directo en cierto desarrollo directo $G = H + K$ del grupo G;

d) la cantidad de subgrupos de orden p^l de un grupo elemental G de orden p^k, donde $k \geqslant l > 0$ es igual a

$$\frac{(p^k-1)(p^k-p)(p^k-p^2)\ldots(p^k-p^{l-1})}{(p^l-1)(p^l-p)(p^l-p^2)\ldots(p^l-p^{l-1})}.$$

1708*. Demostrar que el grupo abeliano finito G se engendra mediante sus elementos de orden máximo.

§ 21. Anillos y campos

Aclarar cuáles de los siguientes conjuntos son anillos (pero no campos) y cuáles son campos con relación a las operaciones indicadas. (Si las operaciones no se indican, se sobreentienden la adición y multiplicación de los números.)

1709. Números enteros.

1710. Números pares.

1711. Números enteros, múltiples a un número n dado (en particular, examinar el caso de $n = 0$).

1712. Números racionales.

1713. Números reales.

1714. Números complejos.

1715. Números tipo $a + b\sqrt{2}$, siendo a y b enteros.

1716. Números tipo $a + b\sqrt{3}$, siendo a y b racionales.

1717. Números complejos tipo $a + bi$, siendo a y b enteros.

1718. Números enteros tipo $a + bi$, siendo a y b racionales.

1719. Matrices de orden n con elementos enteros con relación a la adición y multiplicación de las matrices.

1720. Matrices de orden n con elementos reales con relación a la adición y multiplicación de las matrices.

1721. Funciones con valores reales, continuas en el segmento $[-1, +1]$ con relación a las operaciones corrientes de adición y multiplicación de las funciones.

1722. Polinomios con respecto a una indeterminada x de coeficientes enteros con relación a las operaciones corrientes de adición y multiplicación.

1723. Polinomios con respecto a una indeterminada x de coeficientes reales con relación a las operaciones corrientes.

1724. Todas las matrices tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$, siendo a, b racionales o reales, con relación a las operaciones corrientes de adición y multiplicación de las matrices.

1725*. ¿Formarán todos los polinomios trigonométricos $a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$ con coeficientes reales un anillo? Aclarar lo mismo para los polinomios sólo de los cosenos $a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx$ y sólo para los senos $\sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{sen} kx$.

1726*. ¿Formarán un anillo los números tipo $a + b\sqrt[3]{2}$ con a y b racionales, con relación a las operaciones corrientes (para mayor precisión se toma el valor real de la raíz).

1727*. Mostrar que los números tipo $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ con a, b, c racionales forman un campo, con la particularidad de que cada elemento de este campo de aspecto dado se representa unívocamente.

Hallar el elemento, inverso al número $1 - \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}$ (se toma el valor real de la raíz).

1728. Demostrar que los números tipo $a + b\sqrt[3]{5} + c\sqrt[3]{25}$ con a, b, c racionales, forman un campo; hallar en este campo el número, inverso al número $x = 2 + 3\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{25}$.

1729*. Sea α una raíz del polinomio $f(x)$ de grado $n > 1$ de coeficientes racionales, irreducible sobre el campo de números racionales. Demostrar que los números tipo $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$, siendo $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ racionales, forman un campo, con la particularidad de que cada elemento de dicho campo se anota unívocamente en la forma indicada. Se dice que este campo se ha obtenido, uniendo el número α al campo de los números racionales.

1730*. En un campo obtenido uniendo al campo los números racionales de la raíz α del polinomio $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2x - 6$ (problema 1729) hallar el número, inverso a $\beta = 3 - \alpha + \alpha^2$.

1731. Demostrar que todas las matrices diagonales, o sea las matrices tipo

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix},$$

de orden $n \geqslant 2$ de elementos reales con relación a las operaciones corrientes de adición y multiplicación de las matrices forman un anillo conmutativo con divisores de cero.

1732. Citar ejemplos de divisores de cero en un anillo de funciones, continuas en el segmento $[-1, +1]$.

1733. Demostrar que en el anillo de las matrices cuadradas de orden n con elementos de cierto campo, las matrices degeneradas, y sólo ellas, son divisores de cero.

1734. Mostrar que los pares (a, b) de números enteros con operaciones prefijadas mediante las igualdades

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$
$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2),$$

forman un anillo, y hallar todos los divisores de cero de este anillo.

1735. Demostrar que el campo no posee divisores de cero.

1736. Demostrar que de la igualdad $ax = ay$ para un elemento dado a y cualesquiera elementos x e y del anillo se desprende la igualdad $x = y$ cuando, y sólo cuando, a no es el divisor izquierdo de cero.

1737. Mostrar que las matrices de orden $n \geqslant 2$ con elementos pertenecientes a cierto campo, en las cuales todas las filas, empezando por la segunda, constan de ceros, forman un anillo, en el cual todo elemento distinto de cero, será un divisor de cero por la derecha.

¿Qué matrices en este anillo no serán divisores de cero por la izquierda?

1738*. Mostrar que en el anillo con la unidad e la conmutatividad de la adición se desprende de los axiomas del anillo.

1739. Después de comprobar que la propiedad de cero y de los divisores de cero se puede demostrar sin usar la conmutatividad de la adición, demostrar que en el anillo que contiene por lo menos un elemento c que no es divisor de cero, la conmutatividad de la adición se deduce de todos los demás axiomas.

1740. Citar ejemplos de anillos de las matrices de tipo especial que poseen varias unidades por la derecha o varias por la izquierda.

1741. Supongamos que se da un número entero $n \geqslant 0$. Dos números enteros a y b se denominan *comparativos según el módulo n*, lo que se escribe de la siguiente manera: $a \equiv b \pmod{n}$, si su diferencia $a - b$ se divide por n (para $n = 0$ esto significa que $a = b$; para $n > 0$, que a y b, al dividir por n, dan el mismo resto, a saber: el residuo según el módulo n). Mostrar que el conjunto de todos los números enteros Z se divide en clases de números comparativos entre sí que no poseen elementos comunes. Determinemos la adición y multiplicación de las clases mediante las correspondientes operaciones sobre sus representantes, es decir, si los números a, b, $a + b$ y ab pertenecen a las clases A, B, C y D, respectivamente, ponemos $A + B = C$ y $AB = D$.

Demostrar que para semejantes operaciones un conjunto de clases es un anillo (el anillo de los residuos Z_n según el módulo n).

1742*. Demostrar que un anillo conmutativo finito sin divisores de cero que contiene más de un elemento, es campo.

1743*. Mostrar que el anillo de los residuos según el módulo n (problema 1741) será campo cuando, y sólo cuando, n es un número primo.

1744. Una matriz cuadrada se denomina *escalar* si sus elementos en la diagonal principal son iguales entre sí, y fuera de la diagonal principal son nulos. Mostrar que las matrices escalares de orden n con elementos reales para las operaciones corrientes forman un campo, isomorfo al campo de los números reales.

1745. Mostrar que las matrices tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, donde a y b son números reales, forman un campo, isomorfo al campo de los números complejos.

1746. Demostrar que el campo de las matrices tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ de números racionales a y b (problema 1724) es isomorfo al campo de números tipo $a + b\sqrt{2}$, donde a, b son también racionales.

1747*. Demostrar que el álgebra de matrices reales tipo

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

es isomorfa al álgebra de los cuaternios $a + bi + cj + dk$.

1748. Demostrar que el álgebra de las matrices tipo $\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}$, siendo a, b, c, d reales e $i=\sqrt{-1}$, es isomorfa al álgebra de los cuaternios $a+bi+cj+dk$.

1749. Hallar todos los automorfismos (es decir, las aplicaciones isomorfas sobre sí) del campo de números complejos que dejan invariables los números reales.

1750*. Demostrar que cualquier campo numérico contiene en calidad de un subcuerpo conmutativo el campo de números racionales.

1751*. Demostrar que para cualquier isomorfismo de los campos numéricos el subcuerpo conmutativo de números racionales se aplica de modo idéntico.

En particular, el campo de números racionales admite sólo una aplicación isomorfa idéntica sobre sí.

1752*. Demostrar que la aplicación idéntica es la única aplicación isomorfa del campo de números reales sobre sí.

1753. Haciendo uso del problema 1752, hallar todas las aplicaciones isomorfas del campo de números complejos sobre sí, que convierten los números reales de nuevo en reales.

1754. Demostrar que el subcuerpo conmutativo mínimo de cualquier campo de la característica cero es isomorfo al campo de números racionales.

1755. Demostrar que el subcuerpo conmutativo mínimo de cualquier campo de la característica p es isomorfo al campo de los residuos según el módulo p.

1756. Resolver el sistema de ecuaciones

$$x+2z=1,\ y+2z=2,\ 2x+z=1$$

en el campo de los residuos según el módulo 3 y según el módulo 5.

1757. Resolver el sistema de ecuaciones

$$3x+y+2z=1,\ x+2y+3z=1,\ 4x+3y+2z=1$$

en el campo de los residuos según el módulo 5 y el módulo 7.

1758. Hallar el máximo común divisor de los polinomios

$$f(x)=x^3+x^2+2x+2,\ g(x)=x^2+x+1$$

a) sobre el campo de los residuos según el módulo 3;

b) sobre el campo de números racionales.

1759. Hallar el máximo común divisor de los polinomios

$$f(x)=5x^3+x^2+5x+1,\ g(x)=5x^2+21x+4$$

a) sobre el campo de los residuos según el módulo 5 (en este caso cada coeficiente a se tiene que considerar como un múltiplo ae de la unidad e del campo indicado o sustituir los coeficientes por sus mínimos residuos no negativos según el módulo de 5);

b) sobre el campo de números racionales.

1760. Hallar el máximo común divisor de los polinomios

$$f(x)=x^4+1,\ g(x)=x^3+x+1$$

sobre el campo de los residuos según el módulo: a) 3; b) 5.

1761*. a) Demostrar que si los polinomios $f(x)$ y $g(x)$ con coeficientes enteros son primos entre sí sobre el campo Z_p de los residuos según el módulo simple p, con la particularidad de que por lo menos uno de los coeficientes mayores no se divide por p, estos polinomios son primos entre sí sobre el campo de números racionales;

b) mostrar en un ejemplo que para cualquier número primo p la afirmación inversa es incorrecta.

1762*. Demostrar que los polinomios $f(x)$ y $g(x)$ con coeficientes enteros son primos entre sí sobre el campo de números racionales cuando, y sólo cuando, ellos son primos entre sí sobre el campo de residuos según el módulo p, donde p es cualquier número primo, a excepción, puède ser, de un conjunto finito de semejantes números.

1763. Descomponer el polinomio $x^5 + x^3 + x^2 + 1$ en factores irreducibles sobre el campo de los residuos según el módulo 2.

1764. Descomponer el polinomio $x^3 + 2x^2 + 4x + 1$ en factores irreducibles sobre el campo de los residuos según el módulo 5.

1765. Descomponer el polinomio $x^4 + x^3 + x + 2$ en factores irreducibles sobre el campo de los residuos según el módulo 3.

1766. Descomponer el polinomio $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 4$ en factores irreducibles sobre el campo de los residuos según el módulo 5.

1767. Desarrollar todos los polinomios de segundo grado con respecto a x en factores irreducibles sobre el campo de los residuos según el módulo 2.

1768. Descomponer todos los polinomios de tercer grado con respecto a x en factores irreducibles sobre el campo de los residuos según el módulo 2.

1769. Hallar todos los polinomios de segundo grado con respecto a x con el coeficiente mayor igual a 1, irreducibles sobre el campo de los residuos según el módulo 3.

1770. Hallar todos los polinomios de tercer grado con respecto a x con el coeficiente mayor igual a 1, irreducibles sobre el campo de los residuos según el módulo 3.

1771*. Demostrar que si el polinomio $f(x)$ con coeficientes enteros se reduce sobre el campo de números racionales, es reducible sobre el campo de los residuos según cualquier módulo simple p, que no divide el coeficiente mayor. Citar un ejemplo del polinomio reducible sobre el campo de números racionales, pero irreducible sobre el campo de los residuos según el módulo p, donde p divide el coeficiente mayor.

1772*. Demostrar que cualquier subgrupo finito G de un grupo multiplicativo del campo P es cíclico. Por ejemplo, el grupo multiplicativo del campo Z_p de los residuos del anillo de números enteros Z según el módulo simple p y del grupo G_n de las raíces de n-ésimo grado de la unidad son cíclicos (lo último es sencillo demostrarlo, usando la anotación de las raíces en forma trigonométrica).

1773*.[1]) Existen polinomios con coeficientes enteros irreducibles

[1]) Este problema se lo ofreció al autor I. R. Shafarévich.

sobre el campo de números racionales, pero reducibles sobre el campo de los residuos según cualquier módulo simple p.

Demostrar que el polinomio $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ pertenecerá, por ejemplo al caso mencionado antes. Este polinomio es el del mínimo grado con coeficientes enteros que posee la raíz $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

1774*. Demostrar que si todos los elementos de un anillo conmutativo R tienen un divisor común e, este anillo posee la unidad.

1775. Indicar un anillo conmutativo con la unidad que contiene el elemento $a \neq 0$ con una de las siguientes propiedades:

a) $a^2 = 0$; b) para un número entero $n > 1$ dado se cumplen las condiciones $a^n = 0$, $a^k \neq 0$, si $0 < k < n$.

1776. Sea R un anillo conmutativo con la unidad e. Demostrar que:

a) un elemento invertible (es decir, un divisor de la unidad) no puede ser divisor de cero;

b) un elemento invertible posee un elemento invertible único;

c) si δ, ε son invertibles, a se divide por b si, y sólo si, $a\delta$ se divide por $b\varepsilon$;

d) el ideal principal (a) del elemento a perteneciente a R difiere de R cuando, y sólo cuando, a es invertible.

1777. Sea R un anillo conmutativo con la unidad e y sin divisores de cero. Demostrar que:

a) los elementos a, b son asociados cuando, y sólo cuando, cada uno de ellos se divide por el otro;

b) los ideales principales (a) y (b) coinciden cuando, y sólo cuando, a y b son asociados (la definición del ideal principal se da en el problema 1783).

1778. Sean R un anillo conmutativo con la unidad e y $R\langle x\rangle$ un conjunto de todas las series de potencias formales $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$, $\alpha_n \in R$.

Introduzcamos las operaciones corrientes de *adición* y *multiplicación* de las series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n) x^n,$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n, \text{ donde } \gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}.$$

Mostrar que:

a) $R\langle x\rangle$ es un anillo conmutativo con la unidad;

b) $R\langle x\rangle$ contiene un subanillo isomorfo a R;

c) si R no tiene divisores de cero, lo dicho es justo también para $R\langle x\rangle$;

d) si R es un campo, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ será un elemento invertible del anillo $R\langle x\rangle$ cuando, y sólo cuando $\alpha_0 \neq 0$.

1779*. Sea R un conjunto de todos los números tipo $a + b\sqrt{-3}$, donde a y b son racionales. Mostrar que R es un anillo con la unidad, en el cual existe, pero no de modo unívoco, la descomposición en factores primos. En particular, mostrar que en dos descomposiciones

$$4 = 2 \cdot 2 = (1 + \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3})$$

los factores son primos, además 2 no está asociado a $1 \pm \sqrt{-3}$.

1780*. Demostrar que todas las sumas finitas $\sum a_i x r_i$ con a_i reales y r_i no negativos binarios racionales con respecto a las operaciones corrientes de adición y multiplicación de las funciones forman un anillo conmutativo con la unidad y sin divisores de cero, en el cual no existen elementos simples.

1781. Serán los siguientes conjuntos subgrupos del grupo aditivo, subanillos o ideales de los anillos indicados más abajo:

a) el conjunto nZ de los números, múltiples al número $n > 1$, en el anillo de los números enteros Z;

b) el conjunto Z de los números enteros en el anillo $Z[x]$ de polinomios de números enteros;

c) el conjunto $nZ[x]$ de los polinomios, cuyos coeficientes son múltiples al número $n > 1$, en el anillo $Z[x]$ de los polinomios de números enteros;

d) el conjunto N de números naturales en el anillo de números enteros Z;

e) el conjunto Z de números enteros en el anillo A de los números gausianos enteros, es decir, los números tipo $a + bi$ donde a, b son racionales enteros;

f) el conjunto B de los números $a + bi$, donde $a = b$, en el anillo A de números gausianos enteros;

g) el conjunto C de los números tipo $x(1 + i)$ en el anillo A de números gausianos enteros, donde x recorre todo el anillo A;

h) el conjunto $Z[x]$ de los polinomios de números enteros en el anillo $R[x]$ de los polinomios sobre el campo R de números racionales;

i) el conjunto I de los polinomios que no contienen términos con x^k para todos los $k < n$, donde $n > 1$, en el anillo $Z[x]$ de polinomios de números enteros;

j) el conjunto I de los polinomios con términos independientes pares en el anillo $Z[x]$ de polinomios de números enteros;

k) el conjunto I de los polinomios con coeficientes mayores pares en el anillo $Z[x]$ de polinomios de números enteros.

1782. Demostrar que la intersección de cualquier conjunto de ideales de un anillo conmutativo R es ideal.

1783. Se denomina *ideal principal* (a) *engendrado por el elemento a de un anillo conmutativo* R, el ideal mínimo que contiene a. Demostrar que el ideal (a) existe para cualquier elemento $a \in R$ y consta de todos los elementos tipo:

a) ra, donde r es cualquier elemento de R si R posee la unidad;

b) $ra + na$, donde r es cualquier elemento de R y n es cualquier número entero si R no tiene la unidad.

1784. Se denomina *ideal* (M), *engendrado por el conjunto* M *de un anillo conmutativo* R, el ideal mínimo que contiene M. Si el conjunto M consta de un número finito de elementos $a_1, \ldots, a_s$, el ideal (M) se designa también por $(a_1, \ldots, a_s)$. Demostrar que el ideal (M) existe para cualquier conjunto no vacío $M \in R$ y consta de todas las sumas finitas, tipo:

a) $\sum r_i a_i$; $r_i \in R$, $a_i \in M$ si R tiene la unidad;

b) $\sum r_i a_i + \sum n_i a_i$; $r_i \in R$; $a_i \in M$; n_i son números enteros si R no posee unidad.

1785*. Se denomina *anillo de los ideales principales* un anillo conmutativo con la unidad y sin divisores de cero, en el cual cada ideal es el principal (véase el problema 1783). Demostrar que cada uno de los siguientes anillos es el anillo de los ideales principales:

a) el anillo Z de números enteros;

b) el anillo $P[x]$ de polinomios con respecto a una indeterminada x sobre el campo P;

c) el anillo A de números gausianos enteros.

1786. Se denomina *suma de los ideales* $I_1, I_2, \ldots, I_k$ *de un anillo conmutativo* R el conjunto I de todos los elementos x pertenecientes a R, que se representan en la forma

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k;\ x_i \in I_i;\ i = 1, 2, \ldots, k.$$

Se escribe $I = I_1 + I_2 + \ldots + I_k$. Si para cualquier x de I la representación indicada es única, la suma de I se llama *suma directa de los ideales* I_i. En este caso se escribe $I = I_1 + I_2 + \ldots + I_k$.

Demostrar que:

a) la suma de cualquier número finito de ideales es un ideal;

b) la suma de dos ideales será una suma directa cuando, y sólo cuando, su intersección contiene sólo el cero.

1787. Demostrar que si $I = I_1 + I_2$ es una suma directa de ideales I_1, I_2, el producto de cualquier elemento perteneciente a I_1 por cualquier elemento de I_2 es igual a cero.

1788. Sea $R = I_1 + I_2$ una descomposición del anillo conmutativo R con la unidad e en una suma directa de ideales no nulos I_1, I_2.

Demostrar que si $e = e_1 + e_2$; $e_1 \in I_1$; $e_2 \in I_2$, entonces e_1, e_2 serán unidades en I_1 e I_2, respectivamente, pero no en R.

1789. Demostrar que el anillo cociente del anillo $D[x]$ de los polinomios con coeficientes reales según el ideal de los polinomios que se dividen por $x^2 + 1$, es isomorfo al campo de números complejos $a + bi$ con las operaciones de adición y multiplicación, determinadas mediante las reglas bien conocidas del curso escolar.

1790. Demostrar que cualquier aplicación homomorfa del campo P en un anillo R es bien una aplicación isomorfa en cierto campo que entra en R en calidad de subanillo (el denominado encaje de P

en R), o bien la aplicación de todos los elementos de P en cero de R.

1791. Sean Z un anillo de números enteros y R cualquier anillo con la unidad e. Demostrar que la aplicación φ para la cual $\varphi(n) = ne$, es una aplicación homomorfa de Z en R. Hallar la imagen $\varphi(Z)$ del anillo Z para dicho homomorfismo.

1792. Sean A un anillo de números gausianos enteros, I un conjunto de todos los números $a + bi$ donde a y b son pares. a) Mostrar que I es el ideal en A; b) hallar las clases contiguas de A según I; c) en el anillo cociente A/I hallar los divisores de cero y mostrar con ello que A/I no es un campo.

1793. Demostrar que el anillo cociente A/I del anillo de números gausianos enteros según el ideal principal $I = (3)$ es un campo de nueve elementos.

1794. Demostrar que el anillo cociente A/I del anillo de números gausianos enteros según el ideal principal $I = (n)$ será campo cuando, y sólo cuando, n es un número primo, no igual a la suma de dos cuadrados de números enteros.

1795. Sean $P[x, y]$ un anillo de polinomios con respecto a dos indeterminadas x, y sobre el campo P, I un conjunto de todos los polinomios de este anillo sin término independiente. Demostrar que:

a) I es un ideal, pero no es el ideal principal;

b) el anillo cociente $P[x, y]/I$ es isomorfo al campo P.

1796. Sea $I = (x, 2)$ un ideal, engendrado por el conjunto de dos elementos x y 2, en un anillo de polinomios de números enteros $Z[x]$. Demostrar que:

a) el ideal I consta de todos los polinomios con términos independientes pares;

b) el ideal I no es principal;

c) el anillo cociente $Z[x]/I$ es isomorfo al campo de los residuos según el módulo 2.

1797. Sea (n) un ideal, engendrado por un número entero $n > 1$ en el anillo de polinomios de números enteros $Z[x]$. Demostrar que el anillo cociente $Z[x]/(n)$ es isomorfo al anillo $Z_n[x]$ de los polinomios sobre el anillo de los residuos según el módulo n.

1798. Sean R un anillo de todas las funciones reales $f(x)$, determinadas en toda la recta numérica para las operaciones corrientes de adición y multiplicación, y c un número real. Demostrar que:

a) la aplicación $\varphi[f(x)] = f(c)$ es una aplicación homomorfa del anillo R sobre el campo D de números reales;

b) el núcleo del homomorfismo φ, es decir, el conjunto I de todos los elementos del anillo R, transformados en el número 0, es el ideal en R;

c) el anillo cociente R/I es isomorfo al campo de números reales D.

1799. Sean Z_p un campo de los residuos según el módulo simple p, $f(x)$, un polinomio de grado n perteneciente al anillo $Z_p[x]$, irreducible sobre el campo Z_p (de la teoría de los campos se sabe que seme-

jante polinomio existe para cualquier p simple y cualquier n natural), I el ideal principal, engendrado por el polinomio $f(x)$ en el anillo $Z_p[x]$. Demostrar que el anillo cociente $Z_p[x]/I$ es un campo finito y hallar la cantidad de sus elementos.

§ 22. Módulos

Se denomina *módulo izquierdo sobre el anillo R* un grupo abeliano M (por lo general con una anotación aditiva de la operación), para cuyos elementos se define la multiplicación por los elementos de R, de modo que $\lambda a \in M$ para cualesquiera $\lambda \in R$, $a \in M$, con la particularidad de que se cumplen las siguientes condiciones, semejantes a las propiedades de la multiplicación del vector por un número para el espacio lineal:

1. $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$, 2. $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$, 3. $\lambda(\mu a)=(\lambda\mu)a$, donde λ, $\mu \in R$, a, $b \in M$.

Si, además, el anillo R posee la unidad ε y

$$4.\ \varepsilon a = a,\ a \in M,$$

M se denomina *módulo izquierdo unitario sobre R*.

Se llama *submódulo del módulo izquierdo M* sobre el anillo R el subgrupo A del grupo M, para el cual $\lambda a \in A$ para cualesquiera $\lambda \in R$, $a \in A$.

La aplicación φ del módulo izquierdo M sobre el módulo izquierdo M' sobre un mismo anillo R se denomina *homomorfo* si $\varphi(a+b)=\varphi a+\varphi b$, $\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi a$ para cualesquiera a, $b \in M$, $\lambda \in R$.

La aplicación homomorfa y biunívoca del módulo M sobre el módulo M' (sobre el mismo anillo) se denomina *isomorfa* (o *isomorfismo*) y los módulos M y M' se llaman *isomorfos*.

Se denomina *módulo cociente M/A del módulo izquierdo M sobre el anillo R según el submódulo A*, el grupo cociente M/A con la multiplicación natural por los elementos del anillo: $\lambda(x+A)=\lambda x+A$.

Se denomina *secuencia* $O(a)$ (ó *anulador* Ann (a)) *del elemento a del módulo izquierdo M sobre el anillo R* el conjunto de todos los elementos $\lambda \in R$, para los cuales $\lambda a = 0$. Si la secuencia del elemento a contiene sólo el cero del anillo R, a se llama *elemento libre* (o *elemento de orden cero*). En caso contrario, a se llama *elemento periódico* (o *elemento de orden no cero*).

Se determinan de modo análogo los módulos derechos M sobre el anillo R con la multiplicación de $a\lambda \in M$, $a \in M$, $\lambda \in R$, y los conceptos relacionados con ellos.

Si en los problemas siguientes se habla simplemente del módulo M sobre el anillo R, M se examina, para definición, como el módulo izquierdo sobre R, a pesar de que las correspondientes propiedades son válidas también para el módulo derecho sobre R.

Con el fin de simplificar, algunos problemas se enuncian para el caso de un anillo conmutativo, aunque ellos pueden generalizarse para los módulos sobre anillos no conmutativos.

1800. Citar ejemplos de un módulo M sobre el anillo R en el que existen $\lambda \neq 0$ de R y $a \neq 0$ de M, con la particularidad de que $\lambda a = 0$.

1801. Comprobar que cualquier grupo abeliano G (con una anotación aditiva de la operación) es módulo sobre el anillo Z de números enteros.

1802. El módulo izquierdo M sobre el anillo R se denomina *trivial* si $\lambda a = 0$ para cualesquiera $\lambda \in R$, $a \in M$. Demostrar que el módulo izquierdo M sobre el anillo R con la unidad ε se descompone

en una suma directa de los submódulos: $M = M_1 + M_2$, donde M_1 es unitario y M_2, trivial, con la particularidad de que M_1 contiene todos los elementos $a \in M$, para los cuales $\varepsilon a = a$, y M_2, todos los elementos $a \in M$, para los cuales $\varepsilon a = 0$.

1803. Comprobar que:

a) si el anillo conmutativo R se examina como el módulo izquierdo sobre sí mismo, los submódulos de este módulo coinciden con los ideales del anillo R;

b) si el anillo no conmutativo R se examina como un módulo izquierdo (derecho) sobre sí mismo, los submódulos de este módulo coinciden con los ideales izquierdos (derechos) del anillo R.

1804*. Mostrar que el grupo abeliano G primario según el número primo p (problema 1695) puede examinarse como un módulo unitario sobre el anillo R de números racionales, cuyos denominadores no se dividen por p.

1805. Se denomina *submódulo cíclico, engendrado por el elemento a del módulo izquierdo M sobre el anillo R*, el submódulo mínimo $\{a\}$ que contiene a. Demostrar que para cualquier $a \in M$ el submódulo cíclico $\{a\}$ existe y consta de todos los elementos del módulo M que tienen el aspecto:

a) λa, donde $\lambda \in R$ si M es un módulo unitario;

b) $\lambda a + na$, donde $\lambda \in R$ y n es un número entero si M es cualquier módulo.

1806. Demostrar que el espacio lineal n-dimensional sobre el campo P es (para las mismas operaciones) un módulo unitario sobre P, con la particularidad de que este módulo se descompone en una suma directa de n submódulos cíclicos.

1807. Sean M un módulo unitario sobre el anillo conmutativo R con la unidad ε, $\{a\}$ y $\{b\}$, módulos cíclicos, $O(a)$ y $O(b)$, las secuencias de a y b, respectivamente.

a) Demostrar que si $\{a\} = \{b\}$, $O(a) = O(b)$;

b) mostrar en un ejemplo que las condiciones $O(a) = O(b)$ es insuficiente para la igualdad $\{a\} = \{b\}$;

c) demostrar que para la igualdad $\{a\} = \{b\}$ es necesario y suficiente que sea $b = \alpha a$, $a = \beta b$, donde α, β son ciertos elementos pertenecientes a R;

d) demostrar que para la igualdad $\{a\} = \{b\}$ es necesario y suficiente la ejecución de las condiciones: $b = \alpha a$, donde $\alpha \in R$ y es invertible según el módulo $O(a)$, es decir, la clase contigua $\alpha + O(a)$ es un elemento invertible del anillo cociente $R/O(a)$.

1808*. Demostrar que cualquier submódulo A del módulo cíclico $M = \{a\}$ sobre el anillo de los ideales principales R será el mismo cíclico.

1809. Sea R un conjunto de todas las sucesiones infinitas de los números enteros $\alpha = (a_1, a_2, \ldots)$ con la adición y multiplicación por las componentes. Comprobar que R es un anillo conmutativo con la unidad, o sea, el módulo cíclico sobre sí mismo. Hallar en ese módulo el submódulo que no posee un sistema finito de generatrices.

Esto muestra que el submódulo de un módulo cíclico puede no ser cíclico, y el submódulo de un módulo finitamente engendrado puede no ser finitamente engendrado.

1810. Sea M un módulo sobre el anillo conmutativo R.

a) Demostrar que si R no tiene divisores de cero, el conjunto $A \subset M$ de todos los elementos periódicos es un submódulo del módulo M;

b) mostrar en ejemplos que para el anillo R con divisores de cero la afirmación anterior puede ser incorrecta.

1811*. Sean M un módulo sobre el anillo de los ideales principales R, a y b, elementos periódicos de M de las secuencias $O(a) = (\alpha)$, $O(b) = (\beta)$, δ, el máximo divisor común de α y β. Demostrar que el elemento $a + b$ es también elemento periódico de la secuencia $O(a + b) = (\gamma)$, con la particularidad de que: a) γ divide $\alpha\beta/\delta$; b) γ es múltiple a $\alpha\beta/\delta^2$.

1812*. El módulo M se denomina periódico si todos sus elementos son periódicos. El módulo M sobre el anillo de los ideales principales R se denomina *primario* si las secuencias de todos los elementos de M, lo mismo que los ideales en R, se engendran por los grados de un mismo elemento simple p de R. El módulo M se denomina *suma directa de un sistema* (no es obligatoriamente finita) de sus submódulos M_i si cada uno de los elementos no nulo de M se representa unívocamente en forma de una suma de un número finito de elementos no nulos tomados uno por uno de ciertos M_i. Demostrar que cualquier módulo periódico M sobre el anillo de ideales principales R se descompone en una suma directa de submódulos primarios.

1813*. Sea M un módulo sobre el anillo R. Demostrar el teorema: para que en M cualquier submódulo tenga una cantidad finita de generatrices es necesario y suficiente que en M se satisfaga la condición del carácter máximo para los submódulos: cualquier sucesión creciente de submódulos (no son obligatoriamente diferentes) $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$ se estabiliza en el paso final. En particular, eso es válido para los ideales del anillo R si éste se considera como un módulo sobre sí mismo.

1814. Demostrar que si $\{a\}$ y $\{b\}$ son módulos cíclicos unitarios sobre un mismo anillo R, con la particularidad de que los órdenes de a y b están ligados mediante la implicación $O(a) \subset O(b)$, existe una aplicación homomorfa de $\{a\}$ sobre $\{b\}$.

1815. Sea $M = \{a\}$ un módulo cíclico unitario sobre el anillo conmutativo R con la unidad ε. Demostrar que:

a) la secuencia de $O(a)$ del elemento a es el ideal en R;

b) el anillo cociente $R/O(a)$ considerado como módulo sobre R con multiplicación natural, determinada por la multiplicación en R, es isomorfo al módulo M.

1816. Sea $M = A + B$ la descomposición del módulo M sobre el anillo R en una suma directa de los submódulos A y B. Demostrar que el módulo cociente M/A es isomorfo, como módulo sobre R, al módulo B.

1817. El módulo M se denomina *dilatación del módulo A mediante el módulo B* si A es el submódulo de M y el módulo cociente M/A es isomorfo a B (M, A, B son módulos sobre un mismo anillo R). Demostrar que la dilatación de un módulo finitamente engendrado mediante uno engendrado finitamente es un módulo finitamente engendrado.

1818. Demostrar que si en el módulo M se realiza la condición del carácter máximo para los submódulos (véase el problema 1813), esta condición se cumple en el módulo cociente M/A del módulo M según cualquier submódulo A.

1819*. Sean A, B submódulos del módulo M sobre el anillo R. Demostrar el siguiente teorema sobre el isomorfismo:

$$(A + B)/A \cong B/(A \cap B).$$

1820*. Sea M un módulo unitario con una cantidad finita de generatrices $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sobre el anillo conmutativo R con la unidad. Demostrar que si se cumple la condición del carácter máximo para los ideales en el anillo R, se cumple también para los submódulos en el módulo M (este teorema puede generalizarse para los anillos no conmutativos con la condición del carácter máximo para los ideales por la derecha o por la izquierda).

§ 23. Espacios lineales y transformaciones lineales (anexo a los §§ 10, 16—19)

1821. Demostrar que para que se cumpla la igualdad $\alpha x + \beta y = \beta x + \alpha y$, donde α, β son números y x, y, vectores, es necesario y suficiente que sea bien $\alpha = \beta$, o bien $x = y$.

1822*. a) Sin utilizar la conmutatividad de la adición de los vectores, demostrar que los elementos nulo y opuesto por la derecha serán también por la izquierda;

b) haciendo uso del punto a) demostrar que la conmutatividad de la adición de los vectores se desprende de los demás axiomas del espacio lineal.

1823. Sean D un campo de números reales y V un conjunto de todas las funciones, prefijadas y que toman los valores positivos en el segmento $[a, b]$. Determinemos la adición de dos funciones y la multiplicación de la función por un número mediante las igualdades:

$$f \oplus f = fg, \ \alpha \odot f = f^{\alpha}, \ f, \ g \in V, \ \alpha \in D.$$

a) Comprobar que para las operaciones señaladas V es un espacio lineal sobre el campo D;

b) demostrar que el espacio V es isomorfo a V' de todas las funciones reales, prefijadas en el segmento $[a, b]$ para las operaciones corrientes de adición de las funciones y la multiplicación de la función por un número real;

c) hallar la dimensión del espacio V.

1824. Demostrar la independencia lineal del sistema de funciones

$e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$, donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son números reales distintos de dos en dos.

1825*. Demostrar la independencia lineal del sistema de funciones $x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_n}$, donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son números reales distintos de dos en dos.

1826*. Demostrar la independencia lineal de los sistemas de funciones:

a) sen x, cos x; b) 1, sen x, cos x;

c) sen x, sen $2x$, . . ., sen nx; d) 1, cos x, cos $2x$, . . ., cos nx;

e) 1, cos x, sen x, cos $2x$, sen $2x$, . . ., cos nx, sen nx.

1827*. Demostrar la independencia lineal de los sistemas de funciones:

a) 1, sen x, sen$^2 x$, . . ., sen$^n x$; b) 1, cos x, cos$^2 x$, . . ., cos$^n x$.

1828. Demostrar la dependencia lineal de los sistemas de funciones:

a) 1, sen x, cos x, sen$^2 x$, cos$^2 x$, . . ., sen$^n x$, cos$^n x$ para $n \geqslant 2$;

b) sen x, cos x, sen$^2 x$, cos$^2 x$, . . ., sen$^n x$, cos$^n x$ para $n \geqslant 4$.

1829*. Comprobar que todos los polinomios homogéneos de grado k con respecto a n indeterminadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con coeficientes reales (o con coeficientes de cualquier campo) junto con el cero forman un espacio lineal para las operaciones corrientes, y hallar la dimensión de ese espacio.

1830*. Comprobar que todos los polinomios de grado $\leqslant k$ con respecto a n indeterminadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con coeficientes reales (o con coeficientes de cualquier campo) junto con el cero forman un espacio lineal para las operaciones corrientes, y hallar la dimensión de ese espacio.

1831. Sea V un espacio lineal de todos los polinomios con respecto a x de grado $\leqslant n$, $n > 1$, con coeficientes reales.

a) Demostrar que el conjunto L de todos los polinomios de V, que tienen una raíz real c dada, es subespacio de V;

b) hallar la dimensión de L;

c) lo mismo para el conjunto L_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, de todos los polinomios de V que tienen k diferentes raíces reales $c_1, \ldots, c_k$ (sin tener en cuenta su multiplicidad);

d) ¿será subespacio el conjunto L' de todos los polinomios de V que tienen una raíz real simple c?

1832*. Demostrar el teorema: para que dos sistemas linealmente independientes con la misma cantidad de vectores

$$x_1, \ldots, x_k, \tag{1}$$

$$y_1, \ldots, y_k \tag{2}$$

de un espacio n-dimensional V_n sean equivalentes (o engendren el mismo subespacio), es necesario y suficiente que en cualquier base los menores mutuamente correspondientes de las matrices A y B de las filas de coordenadas de los vectores, pertenecientes a esos sistemas, sean proporcionales.

1833. Demostrar que cualquier subespacio L de un espacio lineal n-dimensional V_n es el campo de valores de cierta transformación lineal φ.

1834. Demostrar que cualquier subespacio L del espacio lineal n-dimensional V_n es el núcleo de cierta transformación lineal φ.

1835. Demostrar que si para cada uno de los valores propios, diferentes de dos en dos, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ de la transformación lineal φ se toma un sistema linealmente independiente de vectores propios, el sistema, que contiene todos los vectores elegidos, es linealmente independiente.

1836*. Sean V un espacio lineal real (o un espacio lineal sobre el campo $\hat{P}$, cuya característica difiere de dos) y $V = L \dotplus M$ una descomposición del espacio V en una suma directa de los subespacios L y M. Entonces cualquier vector x se representa unívocamente en la forma de:

$$x = y + Z;\ y \in L,\ Z \in M.$$

La transformación lineal φ, definida por la condición $\varphi x = y$, se denomina *proyección del espacio V sobre L paralelamente a M*. Según el problema 1538, las proyecciones coinciden con las transformaciones idempotentes, es decir, con las transformaciones lineales que poseen la propiedad $\varphi^2 = \varphi$. Haciendo uso de ello, demostrar las afirmaciones:

a) si φ es la proyección sobre L paralelamente a M y ε, una transformación idéntica, entonces $\varepsilon - \varphi$ es la proyección sobre M paralelamente a L;

b) para que la suma $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ de dos proyecciones φ_1 y φ_2 sea proyección, es necesaria y suficiente la condición

$$\varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\varphi_1 = \omega, \qquad (1)$$

donde ω es la transformación nula; si φ_1 y φ_2 son respectivamente las proyecciones sobre L_1 paralelamente a M_1 y sobre L_2 paralelamente a M_2, con la particularidad de que se cumple la condición (1), $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ es la proyección sobre $L = L_1 \dotplus L_2$ paralelamente a $M = M_1 \cap M_2$;

c) para que la resta $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ de dos proyecciones φ_1 y φ_2 sea proyección, es necesario y suficiente que se cumpla la condición

$$\varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\varphi_1 = \varphi_2; \qquad (2)$$

si φ_1 y φ_2 son proyecciones determinadas en el punto b), con la particularidad de que se cumple la condición (2), entonces $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ es la proyección sobre $L = L_1 \cap M_2$ paralelamente a $M = M_1 \dotplus L_2$;

d) para que el producto $\varphi = \varphi_1\varphi_2$ de dos proyecciones φ_1 y φ_2 sea proyección, es suficiente el cumplimiento de la condición

$$\varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\varphi_1; \qquad (3)$$

si φ_1 y φ_2 son proyecciones determinadas en el punto b), con la particularidad de que se cumple la condición (3), entonces $\varphi = \varphi_1\varphi_2$ es la proyección sobre $L = L_1 \cap L_2$ paralelamente a $M = M_1 + M_2$ (en este caso la suma no es de modo obligatorio directa). Mostrar en un ejemplo que la condición (3) no es necesaria para que el producto de las proyecciones φ_1 y φ_2 sea proyección.

1837*. Demostrar que si para la transformación φ de un espacio euclídeo V en si mismo existe una transformación conjugada φ^*, es decir, la transformación que posee la propiedad $(\varphi x, y) = (x, \varphi y)$ para cualesquiera vectores x, y de V, entonces φ y φ^* son lineales. En particular, las transformaciones antisimétrica y simétrica pueden determinarse respectivamente por las igualdades $(\varphi x, y) = (x, \varphi y)$ y $(\varphi x, y) = -(x, \varphi y)$ sin exigir la linealidad.

1838. Hallar la distancia entre dos planos P_1: $x = a_0 + t_1a_1 + t_2a_2$ y P_2: $x = b_0 + t_1b_1 + t_2b_2$, donde $a_0 = (2, 1, 0, 1)$, $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 0, 1)$, $b_0 = (1, -1, -1, 0)$, $b_1 = (1, 1, 0, -1)$, $b_2 = (1, 1, 2, 3)$ y las coordenadas de los vectores se dan en una base ortonormal.

1839. Se denomina *espacio de Hilbert* el conjunto V de todas las sucesiones infinitas de los números reales $x = (a_1, a_2, \ldots)$, para las cuales converge una serie de cuadrados $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^2$. Semejantes sucesiones se llaman *vectores* (o *puntos*) del espacio V. La adición de los vectores, multiplicación del vector por un número y la multiplicación escalar de los vectores se determinan de la manera corriente. A saber: si $x = (a_1, a_2, \ldots)$ e $y = (b_1, b_2, \ldots)$ son vectores y c, un número, entonces

$$x + y = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ \ldots),\quad cx = (ca_1,\ ca_2,\ \ldots)\ (x,\ y) = \sum_{i=1}^{\infty} a_ib_i.$$

Demostrar que:

a) V es un espacio euclídeo de dimensión infinita;

b) si L^* es un complemento ortogonal al subespacio L perteneciente a V (problema 1364), la igualdad $V = L \dot{+} L^*$ es válida para L de dimensión finita;

c) mostrar en ejemplos que las igualdades $V = L \dot{+} L^*$ y $(L^*)^* = L$ (véase los problemas 1364, 1365) pueden ser incorrectas para los subespacios de dimensiones infinitas de V.

1840. Sean $V_n = L_1 \dot{+} L_2$ una descomposición del espacio euclídeo n-dimensional en una suma directa de dos subespacios, L_1^* y L_2^* los complementos ortogonales de L_1 y L_2, respectivamente, φ una reflexión de V_n en L_1 paralelamente a L_2. Demostrar que la transformación φ^* conjugada a φ, es la reflexión de V_n en L_2^* paralelamente a L_1^*.

1841. Hallar todas las transformaciones isométricas (u ortogo-

nales) que conservan en su sitio el vector nulo: a) en el plano; b) en un espacio tridimensional.

1842*. Hallar el sentido geométrico de una transformación lineal φ del espacio euclídeo tridimensional, prefijado en una base ortonormal e_1, e_2, e_3 mediante la matriz

$$A=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1843*. Aclarar el sentido geométrico de la transformación antisimétrica φ de un espacio euclídeo para los casos: a) de una recta; b) de un plano; c) de un espacio tridimensional. Mostrar que en el espacio tridimensional φ se reduce a la multiplicación vectorial de todos los vectores a la izquierda por un mismo vector a, o sea, $\varphi x = a \times x$.

1844*. Demostrar la afirmación: para que la transformación lineal φ de un espacio euclídeo (no es obligatoriamente que sea de dimensión finita) sea antisimétrica, es necesario y suficiente que convierta cada vector en un vector, ortogonal a él.

§ 24. Funciones y formas lineales, bilineales y cuadráticas (anexo al § 15)

1845*. Demostrar que para cualquier función lineal no nula $l(x)$, prefijada en un espacio lineal n-dimensional V_n, existe una base canónica, en la cual esa función se escribe en forma canónica como $l(x) = x_1$, donde x_1 es la primera coordenada del vector x en esta base.

1846. Demostrar que la forma bilineal no nula $b(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$ se descompone en un producto de dos formas lineales $b(x, y) = l_1(x)\, l_2(y)$, donde $l_1(x) = \sum_{i=1}^{n} b_ix_i$, $l_2(y) = \sum_{j=1}^{n} c_jy_j$, cuando, y sólo cuando, su rango es igual a la unidad.

1847. Demostrar que la función bilineal $b(x, y)$ prefijada en un espacio n-dimensional real (o en un espacio n-dimensional sobre el campo de la característica no igual a dos) es simétrica cuando, y sólo cuando, ella tiene una base canónica, en la cual se escribe en forma bilineal tipo canónico: $b(x, y) = \lambda_1x_1y_1 + \lambda_2x_2y_2 + \ldots + \lambda_nx_ny_n$.

1848*. Demostrar que si el producto de dos funciones lineales, prefijadas en un espacio lineal V (no obligatoriamente de dimensión finita), es idéntico a cero, es decir, $l_1(x)\, l_2(x) = 0$ para cualquier

$x \in V$, entonces por lo menos una de esas funciones es idénticamente igual a cero.

1849*. Demostrar que si la función bilineal simétrica $b(x, y)$, prefijada en un espacio lineal V (no obligatoriamente de dimensión finita), se descompone en dos funciones lineales: $b(x, y) = l_1(x) l_2(y)$, es representable como $b(x, y) = \lambda l(x) l(y)$, donde λ es un número distinto de cero, y $l(x)$ una función lineal.

1850*. Demostrar que la función bilineal en un espacio real n-dimensional tiene el rango igual a 1 cuando, y sólo cuando, en cierta base se escribe en una forma tipo:

a) $\pm x_1 y_1$ si la función es simétrica;

b) $x_1 y_2$ si la función es asimétrica.

1851*. Demostrar que una función antisimétrica no nula en un espacio lineal V (no obligatoriamente de dimensión finita) no puede descomponerse en un producto de dos funciones lineales.

1852*. Sea $l(x)$ una función lineal no nula en un espacio lineal V (no obligatoriamente de dimensión finita). Demostrar que:

a) el núcleo S de la función $l(x)$, es decir, el conjunto de todos los vectores $x \in V$, para los cuales $l(x) = 0$, es el máximo subespacio lineal, o sea, S no está en el subespacio T, diferente de S y V;

b) para cualquier vector a que no yace en S, cualquier vector x se representa unívocamente en forma de $x = y + \alpha a$, donde $y \in S$.

1853*. Demostrar que si dos funciones lineales $l_1(x)$ y $l_2(x)$ en un espacio lineal V (no obligatoriamente de dimensión finita) tienen el mismo núcleo S, $l_1(x) = \lambda l_2(x)$, donde λ es un número distinto de cero.

1854*. Aplicando el método de Jacobi para calcular los menores angulares, determinar la clase afín de las superficies en un espacio tridimensional:

a) $x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 = 0$;

b) $x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1 + 1 = 0$.

1855. Demostrar que si la forma cuadrática con una matriz A es determinada positivamente, la forma cuadrática

a) con la matriz inversa A^{-1}; b) con la matriz recíproca $\hat{A}$ también está determinada positivamente.

1856*. Sea $f(x)$ una función cuadrática en un espacio lineal real n-dimensional V_n. El vector x_0 se denomina *isótropo* si $f(x_0) = 0$. Demostrar que si la función $f(x)$ es de signo variable, o sea, existen vectores x_1, x_2, tales que $f(x_1) > 0$, $f(x_2) < 0$, existe una base que consiste de vectores isótropos. Indicar el método de construcción de semejante base.

1857*. Se denomina *cono isótropo* (o *nulo*) *de la función cuadrática* $f(x)$ el conjunto K de todos los vectores isótropos (problema 1856). Demostrar que el cono isótropo de la función cuadrática $f(x)$ en un espacio real n-dimensional V_n será subespacio cuando, y sólo cuando, $f(x)$ es de signo constante, o sea, bien $f(x) \geqslant 0$ para todo x, o bien $f(x) \leqslant 0$ para todo x.

1858*. Sean $f(x)$ una función cuadrática en un espacio lineal real n-dimensional V_n, r el rango, p y q los índices negativo y positivo de la inercia de esta función. Demostrar que la dimensión máxima de los subespacios lineales que entran en el cono isótropo K (problema 1857), es igual a:

a) mín (p, q) si $f(x)$ es regular (es decir, $r = n$);

b) $n -$ máx $(p, q) =$ mín $(p, q) + n - r$ si $f(x)$ es cualquier función (degenerada o regular).

1859*. Sea $f(x)$ una función cuadrática con las mismas propiedades que en el problema anterior. Demostrar que la dimensión máxima de la variedad lineal P que entra en la superficie de segundo orden S, prefijada por la ecuación $f(x) = 1$, es igual a:

a) mín (p, q) si $f(x)$ es regular (es decir, $r = n$);

b mín $(p - 1, q) + n - r = n -$ máx $(p, q + 1)$ en el caso general.

1860. Haciendo uso de los problemas 1858 y 1859, hallar la dimensión máxima de las variedades lineales que se encuentran en las siguientes superficies de segundo orden (si la dimensión del espacio no se indica, se considera igual al máximo número de las coordenadas; la dimensión de una variedad vacía se considera igual a -1):

a) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$ (hiperboloide de una hoja);

b) $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$ (hiperboloide de dos hojas);

c) $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$; d) $x_1x_2 = 1$;

e) $x_1x_2 = 1$ (en un espacio tridimensional);

f) $x_1x_2 = 0$;

g) $x_1x_2 = 0$ (en un espacio n-dimensional); h) $x_1^2 - x_n^2 = 1$;

i) $x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2 = 1$; j) $x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = 1$;

k) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1$; l) $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} x_k^2 = 1$.

1861*. Se denomina *núcleo por la izquierda* (o *espacio nulo por la izquierda*) de una función bilineal $b(x, y)$, prefijada en un espacio lineal V, el conjunto L_0' de todos los vectores $x \in V$, para los cuales $b(x, y) = 0$, para todo $y \in V$. De modo análogo se determina el núcleo por la derecha L_0''.

Demostrar que: a) los núcleos por la derecha e izquierda son subespacios;

b) en un espacio n-dimensional los núcleos por la derecha e izquierda tienen la misma dimensión $n - r$, donde r es el rango de $b(x, y)$, o sea, el rango de su matriz en alguna base.

1862. Hallar las bases de los núcleos por la derecha e izquierda (de espacios nulos) L_0' y L_0'' (problema 1861) para la forma bilineal $b(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 6x_2y_2$ y mostrar que $L_0' \neq L_0''$.

1863*. a) Demostrar que para las funciónes bilineales antisimétricas y simétricas el núcleo por la izquierda coincide con el núcleo por la derecha;

b) citar un ejemplo de una función bilineal en un espacio n-dimensional que no sea ni antisimétrica, ni simétrica, pero para la que

el núcleo por la izquierda coincida con el núcleo por la derecha.

1864*. Demostrar que una función bilineal antisimétrica no nula en el espacio tridimensional se representa en forma de $b(x, y) = a(x)\, b(y) - a(y)\, b(x)$, donde $a(x)$ y $b(x)$ son funciones lineales.

1865*. Sean $b(x, y)$ una función bilineal y L un subespacio k-dimensional en el espacio n-dimensional V_n. Indicaremos con la notación L^* el conjunto de todos los vectores $y \in V_n$, tales que $b(x, y) = 0$ para todos $x \in L$. Demostrar que:

a) L^* es un subespacio;

b) si $b(x, y)$ es regular (es decir, el rango es igual a n), la dimensión de L^* es igual a $n - k$;

c) si $b(x, y)$ tiene el rango $r < n$, la dimensión de L^* es mayor o igual al máx $(n - k, n - r)$.

1866*. Sea $b(x, y)$ una función bilineal antisimétrica no nula en el espacio lineal n-dimensional V_n. Demostrar que existe una base, en la cual $b(x, y)$ se escribe en forma lineal del siguiente tipo canónico:

$$b(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3 + \ldots \\ \ldots + x_{2k-1}y_{2k} - x_{2k}y_{2k-1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n/2.$$

Hallar la forma canónica de una forma bilineal antisimétrica (problema 1866) y la transformación regular de las indeterminadas que conduce a ella, para las siguientes formas:

1867. $b(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1 + 2(x_1y_3 - x_3y_1) - x_1y_4 + x_4y_1 - 3(x_2y_4 - x_4y_2)$.

1868. $b(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1 + 2(x_1y_3 - x_3y_1) + 4(x_2y_4 - x_4y_2)$.

1869*. Sea $f(x)$ una función cuadrática en el espacio euclídeo n-dimensional V_n. Demostrar la afirmación:

Para que el cono K con la ecuación $f(x) = 0$ (problema 1857) contenga una base ortonormal del espacio V_n es necesario y suficiente que la traza de la matriz A de la función $f(x)$ en una (lo que significa que en cualquiera) base ortonormal sea igual a cero. Enunciar la correspondiente afirmación en el lenguaje matricial.

§ 25. Espacios afines (puntuales-vectoriales)

Definición [1]. Supongamos que se da un conjunto $\mathfrak{U}$ de elementos A, B, C, ... denominados puntos, y un espacio lineal V (sobre el campo de números reales o sobre cualquier campo P) de elementos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \ldots$, denominados vectores. Prosiguiendo, supongamos que a cada par ordenado de puntos A, B (distintos o coincidentes) les corresponde el único vector $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{AB}$, con la particularidad de que para esta correspondencia se cumplen los dos siguientes axiomas:

---

[1]) La definición del espacio afín, citado aquí, se ha cogido (con ciertos cambios) del libro: N. V. Efímov. Geometría superior. Editorial «Mir», 1984.

I) para cualquier punto A y cualquier vector x existe el único punto B, tal que $\overrightarrow{AB}=x$;

II) para tres puntos cualesquiera (no es obligatorio que sean diferentes) A, B, C tiene lugar la igualdad $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

El conjunto $\mathfrak{U}$ junto con esta correspondencia se denomina *espacio afín.*

Si $V=V_n$ es un espacio lineal n-dimensional, $\mathfrak{U}$ se denomina espacio afín n-dimensional y se designa por $\mathfrak{U}_n$. Si V es de dimensión infinita, $\mathfrak{U}$ también se llama de dimensión infinita. Si el espacio lineal V es euclídeo, el espacio puntual-vectorial $\mathfrak{U}$ se denomina euclídeo. En este caso la distancia entre los puntos A y B es igual a la longitud del vector $\overrightarrow{AB}$ y el ángulo ABC es igual al ángulo entre los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$.

Observación. Cualquier espacio lineal V puede examinarse como afín. En este caso el conjunto $\mathfrak{U}$ coincide con V, de modo que los vectores se consideran a título de puntos. Se dice también que el vector x prefija cierto punto del espacio afín. La comparación del par ordenado de los puntos del vector, señalado en la definición, consiste en este caso en que a un par ordenado de puntos x, y pertenecientes a V les corresponde el vector $z=y-x$. De aquí, sabiendo x y z se determina unívocamente y, lo que demuestra el axioma I. El axioma II se reduce a la igualdad evidente $(y-x)+(z-y)=z-x$. Semejante identificación de los puntos y vectores fue tomada en los §§ 16—19 del presente libro.

Se denomina *plano del espacio afín* $\mathfrak{U}$ *que pasa a través de* A *y tiene el subespacio* L *como director*, el conjunto π de todos los puntos M perteneciente a $\mathfrak{U}$, para los cuales el vector $\overrightarrow{AM}$ pertenece a L. Se llama *dimensión del plano* π la de su subespacio director L. Los planos unidimensionales se denominan *rectos* y los planos $(n-1)$-dimensionales del espacio n-dimensional, *hiperplanos.*

Dos planos π_1 π_2 se denominan *paralelos* (simbólicamente, $\pi_1 \parallel \pi_2$) si no se intersecan (es decir, no tienen puntos comunes) y el subespacio director de uno de ellos se halla en el subespacio director del otro (o coincide con él).

Si se elige cierto punto inicial $O\in\mathfrak{U}$, cualquier punto M se determina unívocamente por el vector $\overrightarrow{OM}$ y viceversa. El vector $\overrightarrow{OM}$ se denomina *radio vector* del punto M. El plano π que atraviesa el punto A y posee un subespacio director L, consta de todos los puntos M, cuyos radios vectores se definen a partir de la igualdad $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+x$, donde $x\in L$. Si se consideran los vectores de V como puntos, el plano se determina mediante la igualdad $\pi=x_0+L$, donde $x_0=\overrightarrow{OA}$. Así, pues, en este caso el concepto de plano coincide con el de la variedad lineal del § 16. Los planos que atraviesan el punto O coincidirán con los subespacios.

El sistema afín de coordenadas de un espacio afín n-dimensional $\mathfrak{U}_n$ consta del punto $O\in\mathfrak{U}_n$, denominado *origen de coordenadas*, y de la base e_1, e_2, ..., e_n correspondiente al espacio lineal V_n. Se llaman *coordenadas del punto* $M\in\mathfrak{U}_n$ las coordenadas de su radio vector $\overrightarrow{OM}$ en dicha base, es decir, los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisfacen la igualdad

$$\overrightarrow{OM}=x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n.$$

Supongamos que un plano k-dimensional π de un espacio afín n-dimensional real atraviesa el punto A de coordenadas $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ y tiene un subespacio determinante L con una base de vectores, prefijados por sus coordenadas

$$\mathbf{c}_i=(c_1^i,\ c_2^i,\ \ldots,\ c_n^i)\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ k).$$

Entonces las coordenadas de cualquier punto $M\in\pi$ se determinan mediante las igualdades

$$x_i=x_i^0+t_1c_i^1+\ldots+t_kc_i^k\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{1}$$

Estas igualdades se denominan *ecuaciones paramétricas del plano* π. Los parámetros $t_1, t_2, \ldots, t_k$ toman cualesquiera valores reales.

El mismo plano π puede prefijarse mediante $n-k$ ecuaciones linealmente independientes tipo

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-k). \tag{2}$$

Aquí $b_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^0$ y las ecuaciones homogéneas $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=0\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-k)$ prefijan el subespacio L. Las ecuaciones (2) se denominarán ecuaciones generales del plano π.

Las ecuaciones de una recta que atraviesa dos puntos $A\ (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ y $B\ (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$, tienen el aspecto

$$x_i = x_i^0 + t\,(y_i^0 - x_i^0) \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{3}$$

Aquí t recorre todos los números reales.

Se denomina *segmento* AB el conjunto de puntos M, cuyas coordenadas se obtienen de las igualdades (3) a condición de $0 \leqslant t \leqslant 1$. El punto M que divide el segmento AB en una razón de $\lambda \neq -1$, se define en forma vectorial mediante la condición $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$ o en coordenadas

$$x_i=\frac{x_i^0+\lambda y_i^0}{1+\lambda} \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

1870*. En un espacio afín se dan cuatro puntos diferentes A, B, C, D. Los puntos K, L, M, N dividen los segmentos AB, BC, CD, DA en igual razón $m/n \neq -1$. Demostrar que:

a) si $ABCD$ es un paralelogramo, $KLMN$ es también un paralelogramo;

b) si $KLMN$ es un paralelogramo y $m \neq n$, $ABCD$ también es un paralelogramo.

1871. Demostrar que a un par de puntos coincidentes le corresponde un vector nulo, es decir, $\overrightarrow{AA} = 0$.

1872. Demostrar que $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

1873. Demostrar que cualquier plano π de un espacio afín es él mismo un espacio afín, cuya dimensión es igual a la de π.

1874. Demostrar que el plano π que pasa a través del punto A con el subespacio director L, no depende de la elección del punto A en él, o sea, coincide con el plano π' que pasa a través del punto A' perteneciente a π, con el mismo subespacio director L.

Hallar las ecuaciones paramétricas del plano, prefijado mediante las ecuaciones generales:

1875. $x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1,$
$x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 3,$
$x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -3.$

1876. $2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2,$
$6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3,$
$6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9,$
$4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1.$

Hallar las ecuaciones generales del plano, prefijado mediante las ecuaciones paramétricas:

1877. $x_1 = 2 + t_1 + t_2,$
$x_2 = 1 + 2t_1 + t_2,$
$x_3 = -3 + t_1 + 2t_2,$
$x_4 = 3 + 3t_1 + t_2,$
$x_5 = 1 + t_1 + 3t_2.$

1878. $x_1 = 1 + t_1 + t_2,$
$x_2 = 2 + t_2,$
$x_3 = 5 - t_1 + 3t_2,$
$x_4 = 3 + 2t_1 - t_2,$
$x_5 = 1 + 3t_1 - 2t_2.$

1879. Demostrar que a través de dos puntos diferentes A, B de un espacio afín pasa una recta única.

1880. Demostrar que a través de tres puntos cualesquiera A, B, C de un espacio afín, que no yacen en una recta, pasa un plano único bidimensional.

1881. Demostrar que a través de cualesquiera $k+1$ puntos $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_k$ de un espacio afín que no yacen en un plano $(k-1)$-dimensional, pasa un plano único k-dimensional.

1882. Indicar todos los casos de una disposición recíproca de tres planos diferentes de un espacio tridimensional, prefijados mediante las ecuaciones generales:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3,$$

y para cada caso dar la condición necesaria y suficiente mediante el concepto de rango de la matriz.

1883. Mediante el concepto de rango de una matriz caracterizar todos los casos de disposición recíproca de dos rectas en un espacio tridimensional, prefijadas por las ecuaciones generales

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1,\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2,$$

y

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3,\ a_4x + b_4y + c_4z = d_4.$$

1884. Usando el concepto de rango de una matriz describir todos los casos de disposición recíproca de dos planos bidimensionales de un espacio cuadridimensional, prefijados mediante las ecuaciones generales

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij}x_j = b_i \ (i = 1,\ 2) \tag{1}$$

y

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ (i = 3,\ 4). \tag{2}$$

1885. Describir todos los casos de la disposición recíproca de dos hiperplanos de un espacio afín n-dimensional, prefijados mediante las ecuaciones generales

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c$$

y

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n = d.$$

1886*. Demostrar que si la intersección de un conjunto π (finito o infinito) de los planos π_α de un espacio afín no es vacío, π es un plano.

1887. Demostrar que dos planos $\pi_1 = a_1 + L_1$ y $\pi_2 = a_2 + L_2$ se intersecan cuando, y sólo cuando, el vector $a_1 - a_2$ pertenece al subespacio $L_1 + L_2$.

1888*. Demostrar que el plano π_1 de un espacio afín n-dimensional, diferente de un punto, es paralelo a cualquier plano π_2 que no lo interseca, cuando, y sólo cuando, π_1 es un hiperplano (es decir, tiene la dimensión de $n - 1$).

1889*. Demostrar que dos hiperplanos π_1 y π_2 que no se intersecan de un espacio afín n-dimensional son paralelos cuando, y sólo cuando, yacen en el plano π_3 de una dimensión que supera en una unidad la mayor de las dimensiones de π_1 y π_2.

1890*. Demostrar que a través de cualesquiera planos π_1 y π_2 que no se intersecan de un espacio afín n-dimensional pueden trazarse los hiperplanos paralelos π_1' y π_2'.

1891. Sean $\pi_1 = a_1 + L_1$ y $\pi_2 = a_2 + L_2$ planos que no se intersecan de un espacio afín de dimensión finita. Hallar el plano π_3 de la dimensión mínima que contiene π_1 y es paralelo a π_2.

1892. Demostrar que si el plano π_0 de un espacio afín es paralelo a cada uno de los planos π_α y la intersección π de los planos π_α no es vacía, π es un plano paralelo a π_0.

1893. Expresar la condición del paralelismo de dos planos de un espacio afín n-dimensional, prefijados mediante las ecuaciones generales usando el concepto del rango de la matriz.

1894. El hiperplano, prefijado mediante la ecuación general $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$, divide el espacio afín n-dimensional en dos semiespacios compuestos por los puntos, cuyas coordenadas satisfacen una de las desigualdades $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geqslant b$ o $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant b$. Demostrar que cada uno de esos semiespacios es un conjunto convexo.

1895* [1]. El poliedro P está prefijado como una clausura convexa de un sistema de puntos de un espacio afín cuadridimensional, representados mediante las coordenadas

$$O\,(0,\ 0,\ 0,\ 0),\ A\,(1,\ 0,\ 0,\ 0),\ B\,(0,\ 1,\ 0,\ 0),$$
$$C\,(1,\ 1,\ 0,\ 0),\ D\,(0,\ 0,\ 1,\ 0),\ E\,(0,\ 0,\ 0,\ 1),\ F\,(0,\ 0,\ 1,\ 1).$$

a) Escribir el sistema de desigualdades lineales que prefijan el poliedro P;

b) hallar todas las caras tridimensionales de ese poliedro.

[1] Los problemas 1895 – 1898 se los indicó al autor E.B. Vinberg.

1896. Resolver el problema, semejante al anterior, para los puntos:

$$O(0, 0, 0, 0),\ A(1, 0, 0, 0),\ B(0, 1, 0, 0),$$
$$C(0, 0, 1, 0),\ D(1, 1, 0, 0),\ E(1, 0, 1, 0),$$
$$F(0, 1, 1, 0),\ G(1, 1, 1, 0),\ H(0, 0, 0, 1).$$

1897. Hallar los vértices y la forma del poliedro P de un espacio tridimensional prefijado por el sistema de desigualdades

$$x_1 \leqslant 1,\ x_2 \leqslant 1,\ x_3 \leqslant 1,\ x_2 + x_3 \geqslant -1,\ x_1 + x_3 \geqslant -1,$$
$$x_1 + x_2 \geqslant -1.$$

1898. Hallar la forma y los vértices de las secciones de un cubo cuadridimensional, prefijado en un sistema ortonormal de coordenadas por medio de las desigualdades $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, 3, 4$, mediante los planos:

a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$; c) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$;
b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$; d) $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 1$.

1899*. En un espacio afín tridimensional $\mathfrak{A}_3$ sobre el campo Z_2 de dos elementos 0 y 1 hallar: a) la cantidad de todos los puntos; b) la cantidad de todas las rectas; c) la cantidad de todos los planos; d) la cantidad de los puntos, yacentes en una recta; e) la cantidad de rectas que pasan a través de un mismo punto; f) la cantidad de puntos yacentes en un plano; g) la cantidad de planos que atraviesan un mismo punto; h) la cantidad de rectas, yacentes en un plano; i) la cantidad de planos que atraviesan una recta; j) la cantidad de rectas paralelas a la recta dada; k) la cantidad de planos paralelos al plano dado; l) la cantidad de rectas paralelas al plano dado; m) la cantidad de planos paralelos a la recta dada; n) la cantidad de rectas cruzadas con la recta dada.

§ 26. Álgebra tensorial [1)]

Citemos los principales conceptos y propiedades que se suponen ya conocidos de los cursos de conferencias. La demostración de algunas de las propiedades indicadas se ofrece en calidad de problemas en este párrafo.

Supongamos que en un espacio lineal n-dimensional V_n (real, complejo o sobre cierto campo P) se dan dos bases $e_1, e_2, \ldots, e_n$ y $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$. Estas

[1)] Una serie de problemas de este párrafo fueron indicadas por N. V. Efímov y L. A. Skorniakov conforme al curso de «Algebra y geometría lineal» que han leído en la facultad mecánico-matemática de la Universidad Lomonósov de Moscú a partir de 1964.

Por ejemplo, la definición del producto tensorial y la aplicación del término de convolución a éste (véase el problema 1918) fueron tomados del curso de N. V. Efímov.

bases están relacionadas mediante las igualdades:

$$e'_1 = c_1^1 e_1 + c_1^2 e_2 + \ldots + c_1^n e_n,$$
$$e'_2 = c_2^1 e_1 + c_2^2 e_2 + \ldots + c_2^n e_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$e'_n = c_n^1 e_1 + c_n^2 e_2 + \ldots + c_n^n e_n,$$

o en abreviatura

$$e'_i = c_i^k e_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (1)$$

Aquí y a continuación se supone la adición según el índice que está tanto arriba como abajo, en los límites desde 1 hasta n.

Introduzcamos la matriz del cambio

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \ldots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \ldots & c_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_1^n & c_2^n & \ldots & c_n^n \end{pmatrix},$$

en cuyas columnas se encuentran las coordenadas de los vectores de la segunda base en la primera[1]). Entonces las fórmulas (1) en forma matricial se escribirán mediante la igualdad

$$(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)\, C.$$

Las coordenadas del vector x en la primera base se expresan a través de las coordenadas del mismo vector en la segunda base mediante las filas de la matriz C según las fórmulas:

$x^k = c_i^k x'^i$, $k = 1, 2, \ldots, n$. De aquí las coordenadas de x'^i se expresan mediante x^k en la forma

$$x'^i = d_k^i x^k, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (2)$$

Introduzcamos la matriz $D = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_1^2 & \ldots & d_1^n \\ d_2^1 & d_2^2 & \ldots & d_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_n^1 & d_n^2 & \ldots & d_n^n \end{pmatrix}$, en cuyas columnas se hallan los coeficientes en las expresiones de x'^i a través de x^k. Entonces las fórmulas (2) en forma matricial se escribirán mediante la igualdad

$$(x'^1, x'^2, \ldots, x'^n) = (x^1, x^2, \ldots, x^n)\, D.$$

Puesto que por una parte $(x^1, x^2, \ldots, x^n) = (x'^1, x'^2, \ldots, x'^n)\, C^*$, entonces las matrices C y D están relacionadas mediante la igualdad

$$D = (C^*)^{-1}. \qquad (3)$$

Aquí y en adelante el asterisco designa la matriz traspuesta. Si ambas matrices C y D se escriben de los coeficientes de las fórmulas (1) y (2) pero no por las columnas, sino por las filas, estas matrices se sustituyen por las traspuestas y la igualdad (3) no varía.

La ley de variación, semejante a la variación de la base según las fórmulas (1), se denomina *covariante* y la ley de variación según las fórmulas (2), *contravariante*. Las magnitudes (u otros objetos) relacionadas con la base y que varían de modo covariante, se denominan *covariantes* y se designan mediante los índices inferiores y las que varían de modo contravariante se denominan *contravariantes* y se designan mediante los índices superiores.

[1]) Si la matriz del cambio no se escribe por las columnas, sino por las filas, las fórmulas que utilizan la multiplicación matricial, varían, mientras que las fórmulas (1), (2) y otras que no usan la multiplicación de las matrices, permanecerán las mismas.

Se denomina *tensor* en un espacio lineal n-dimensional una correspondencia para la cual a cada base del espacio le corresponden n^{p+q} números $a_{i_1 i_2 \ldots i_p}^{j_1 j_2 \ldots j_q}$, indicados por los índices p inferiores y q superiores y que cambian al variar la base de modo covariante según los índices inferiores, y de modo contravariante, según los índices superiores. Estos números se denominan *coordenadas de un tensor* en la base dada, y el número $p + q$, la *valencia del tensor*. También se dice que dicho tensor es p veces covariante y q veces contravariante o tensor de tipo (p, q).

Según la definición del tensor, sus coordenadas en las dos bases

$$e_1, e_2, \ldots, e_n \quad \text{y} \quad e'_1, e'_2, \ldots, e'_n,$$

relacionadas mediante la igualdad (1), están enlazadas por sí mismas mediante las igualdades

$$a'^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} = c^{k_1 k_2}_{i_1 i_2} \ldots c^{k_p}_{i_p} d^{j_1}_{l_1} d^{j_2}_{l_2} \ldots d^{j_q}_{l_q} a^{l_1 l_2 \ldots l_q}_{k_1 k_2 \ldots k_p} \tag{4}$$

$$(i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots j_q = 1, 2, \ldots, n).$$

En este caso, como en general, por todos los índices k_s y l_t se supone la adición en los límites desde 1 hasta n.

El tensor puede determinarse de otro modo, por ejemplo, como un objeto geométrico, relacionado con el espacio lineal V_n. Con este fin se examina un espacio conjugado V_n^*. Sus vectores son funciones lineales $\varphi(x)$ prefijadas en un espacio V_n dado para las operaciones corrientes de adición de dos funciones y la multiplicación de una función por un número. El espacio V_n^* es también n-dimensional, con la particularidad de que a cada base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ del espacio V_n le corresponde la única base $e^1, e^2, \ldots, e^n$ del espacio conjugado V_n^*, llamado *base conjugada* (o *recíproca*) para dicha base del espacio V_n y relacionado con ella mediante las igualdades

$$e^i(e_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

donde δ_{ij} es el símbolo de Kronecker que es igual a 1 para $i = j$ e igual a 0 para $i \neq j$.

Si la base e_i se transforma mediante las fórmulas (1), la base conjugada e^i se transforma mediante las fórmulas

$$e'^i = d^i_k e^k \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Entre todas las funciones polilineales

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_p; \quad \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q)$$

con respecto a p vectores de V_n y q vectores de V_n^* y todos los tensores tipo (p, q) en V_n puede establecerse la siguiente correspondencia biunívoca, isomorfa respecto a las operaciones de adición, multiplicación y multiplicación por un número.

A la función polilineal, escrita antes, le corresponde un tensor, cuyas coordenadas en la base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ en el espacio V_n se determinan mediante las igualdades

$$a^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} = F(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}; e^{j_1}, e^{j_2}, \ldots, e^{j_q}) \tag{6}$$

$$(i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q = 1, 2, \ldots, n).$$

Al contrario, al tensor de coordenadas $a^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ en la base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ le corresponde una función polilineal, determinada mediante la igualdad

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_p; \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q) =$$
$$a^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_p^{i_p} u^1_{j_1} u^2_{j_2} \ldots u^q_{j_q}, \tag{7}$$

donde $x_s^1, x_s^2, \ldots, x_s^n$ son las coordenadas del vector x_s en la base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ y $u_1^t, u_2^t, \ldots, u_n^t$, las coordenadas del vector φ^t en la base conjugada $e^1, e^2, \ldots, e^n$.

En este caso el valor de la función polilineal en dichos vectores no depende de la elección de las bases conjugadas en V_n y V_n^*.

En vista de la correspondencia señalada, los tensores en el espacio V_n pueden determinarse, independientemente de la base, como funciones polilineales con respecto a los vectores del espacio V_n y del espacio conjugado V_n^*.

Se denomina *espacio con una métrica cuadrática* un espacio lineal real n-dimensional M_n en el cual se da una función bilineal simétrica regular $g(x, y)$, llamada función métrica. Si la función cuadrática $g(x, x)$, correspondiente a ella, es determinada positiva, el espacio con la métrica cuadrática es un espacio euclídeo y se designará por E_n. Entonces en lugar de $g(x, y)$ escribiremos simplemente (x, y) y denominaremos el valor de esa función producto escalar de los vectores x e y.

En el espacio M_n a cada base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ le corresponde la única base recíproca $e^1, e^2, \ldots, e^n$, relacionada con la base dada mediante las igualdades:

$$g(e_i, e^j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Cada vector x del espacio M_n se descompone por las bases e_i y e^i, es decir, $x = x^i e_i = x_i e^i$. Cuando la base e_i cambia según las fórmulas (1), las coordenadas de x^i en esta base varían según las fórmulas (2), es decir, de modo contravariante, y se denominan coordenadas contravariantes. Al mismo tiempo la base recíproca e^i se transforma mediante las fórmulas

$$e'^i = d_k^i e^k \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{9}$$

y las coordenadas x_i en esta base, mediante las fórmulas

$$x'_i = c_i^k x_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{10}$$

es decir, de modo covariante, y reciben el nombre de coordenadas covariantes.

Siendo el vector fijo $y \in M_n$, la función $\varphi_y(x) = g(x, y)$ es una función lineal con respecto a x, o sea, un elemento del espacio conjugado M_n^*. La correspondencia $y \to \varphi y(x)$ es una aplicación isomorfa de M_n sobre M_n^*. Identificando los elementos de esos espacios que corresponden mutuamente para este isomorfismo, podemos considerar que el espacio M_n^* conjugado con el espacio con métrica cuadrática M_n coincide con M_n. En particular, esto es justo para el espacio euclídeo E_n.

En un espacio con métrica cuadrática M_n una misma función polilineal con respecto a r vectores de M_n puede considerarse como un tensor de tipo (p, q), donde $p + q = r$ y $p = 0, 1, 2, \ldots, r$. Para ello, después de elegir uno de los posibles valores de p, determinamos las coordenadas del tensor en dicha base e_i por las fórmulas análogas a (6), donde e^i es una base recíproca, relacionada con la base e_i mediante las fórmulas (8). Y al revés, por el tensor dado de tipo (p, q) el valor de la función polilineal correspondiente en dichos vectores se determina mediante la fórmula, semejante a la (7). En este caso en las fórmulas (6) y (7) por $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q$ hay que comprender los vectores del mismo espacio M_n.

Por ejemplo, a la función métrica $g(x, y)$ le corresponden dos tensores de coordenadas

$$g_{ij} = g(e_i, e_j) \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n); \tag{11}$$

$$g^{ij} = g(e^i, e^j) \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{12}$$

denominados tensores métricos contravariantes y covariantes, respectivamente. Estos tensores son de tipo (2, 0) y (0, 2), respectivamente. Además, a la misma función $g(x, y)$ le corresponde el tercer tensor de tipo (1, 1), cuyas coordenadas se determinan mediante las fórmulas (8) y no dependen de la elección de la base e_i.

Los valores de la función métrica $g(x, y)$ se determinan mediante cualquiera de las tres fórmulas:

$$g(x, y) = g_{ij}x^i y^j, \qquad (13)$$

$$g(x, y) = g^{ij}x_i y_j, \qquad (14)$$

$$g(x, y) = x_i y^j. \qquad (15)$$

En particular, el producto escalar (x, y) se calcula de la misma manera en un espacio euclídeo.

Supongamos que en un espacio euclídeo se examinan sólo las bases ortonormales. Entonces la matriz C compuesta por los coeficientes de las fórmulas (1), es ortogonal, a partir de la igualdad (3) obtenemos $D = C$, las matrices de los coeficientes de las fórmulas (1) y (2) serán traspuestas mutuamente, la base recíproca coincide con la inicial, las coordenadas covariantes coinciden con las contravariantes y las matrices de los tensores métricos g_{ij} y g^{ij} se convierten en una matriz unidad. En este caso todos los tensores de tipo (p, q) correspondientes a la función polilineal con respecto a los $p + q$ argumentos, coinciden. La diferencia entre las valencias covariantes y contravariantes del tensor pierde su sentido. Por eso todos los índices pueden escribirse debajo, conservando los signos indispensables de la adición.

Supongamos que en un espacio euclídeo E_n se da cualquier base $e_1, e_2, \ldots, e_n$; el determinante de la matriz $G = (g_{ij})$ del tensor métrico covariante en dicha base lo designaremos por g. Puesto que $g(x, x)$ es una función cuadrática determinada positiva, $g > 0$.

Se denomina *tensor discriminante (covariante) de un espacio euclídeo E_n* semejante correspondencia con la cual a cada base le corresponde un sistema de números (coordenadas del tensor) dados por las fórmulas

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} = (-1)^s \sqrt{g}, \qquad (16)$$

donde s es la cantidad de inversiones en la permutación de $i_1, i_2, \ldots, i_n$ y $\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} = 0$ si por lo menos dos de los índices son iguales. En particular, $\varepsilon_{12\cdots n} = \sqrt{g} > 0$.

Las coordenadas del tensor discriminante, al pasar a una nueva base de la misma orientación, varían lo mismo que las del tensor n veces covariante, mientras que al pasar a la base de orientación opuesta, varían complementariamente de signo.

Del mismo modo se determina el tensor discriminante contravariante $\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n}$.

Se llama *volumen orientado de un paralelepípedo Q, construido sobre los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ del espacio E_n* el número definido en dicha base e_i mediante la fórmula

$$V_e(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt{g} \cdot \det_e(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (17)$$

donde $\sqrt{g} > 0$ y $\det_e(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es el determinante formado por las coordenadas de los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en dicha base. Haciendo uso del tensor discriminante, el volumen orientado se expresa mediante la fórmula

$$V_e(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}, \qquad (18)$$

donde x_i^s es la s-ésima coordenada del vector x_i en la base dada.

El volumen orientado se hace nulo cuando, y sólo cuando, los vectores x_i son linealmente independientes. Para los vectores x_i linealmente independientes, su valor absoluto es igual al volumen del paralelepípedo Q, el cual puede ser positivo o negativo en dependencia de si el sistema de vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ está orientado del mismo modo que la base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ o de manera opuesta.

Producto tensorial. Sean V y V' dos espacios lineales sobre un mismo campo P. Examinemos los pares ordenados xx' de los vectores, donde $x \in V$, $x' \in V'$,

y las sumas finitas formales de semejantes pares $x_1x_1' + \ldots + x_kx_k'$. Determinemos la razón de la equivalencia de estas sumas según las reglas: 1) dos sumas que se diferencian sólo por el orden de los sumandos, son equivalentes; 2) los pares $(\alpha x)\,x'$ y $x\,(\alpha x')$, donde $\alpha \in P$, son equivalentes; 3) el par $(x+y)\,x'$ es equivalente a la suma de los pares $xx' + yx'$ y el par $x\,(x' + y')$ es equivalente a la suma de los pares $xx' + xy'$.

Dos sumas son equivalentes si de una de ellas puede pasarse a la otra, aplicando las reglas señaladas a toda la suma o a su parte en un número finito. Por eso todas las sumas se dividen en clases de sumas equivalentes. Sea T un conjunto de esas clases. Introduzcamos en T las operaciones de adición y multiplicación por los elementos del campo P por medio de las operaciones sobre los representantes de las clases. Se denomina *suma* de dos sumas la suma obtenida inscribiendo a la primera suma los sumandos de la segunda. Determinemos la *multiplicacion* de la suma por $\alpha \in P$ como la multiplicación de los primeros elementos de todos los pares de dicha suma por el número α. Por ejemplo, $\alpha\,(xx' + yy') = (\alpha x)\,x' + (\alpha y)\,y'$.

El conjunto T para estas operaciones es un espacio lineal sobre el campo P. Se denomina *producto tensorial de los espacios* V y V' y se designa por $V \times V'$. Si V y V' son de dimensión finita, $V \times V'$ es de dimensión finita y su dimensión es igual al producto de las dimensiones de V y V'. Si $e_1, e_2, \ldots, e_n$ es la base de V y $e_1', e_2', \ldots, e_{n'}'$, la base de V', el sistema de las clases de sumas equivalentes que contienen pares ordenados

$$e_ie_j' \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, n'), \tag{19}$$

es la base del espacio $V \times V'$ (véase el problema 1918).

Se determina del mismo modo el producto tensorial de cualquier conjunto finito de espacios lineales.

Los tensores de tipo (p, q) prefijados en el espacio V_n pueden considerarse como vectores del espacio T que es un producto tensorial de q espacios V_n y p espacios conjugados V_n^*. Para eso tomamos la base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ en V_n y la base conjugada $e^1, e^2, \ldots, e^n$ en V_n^*. Entonces los sistemas ordenados

$$e_{j_1}e_{j_2} \ldots e_{j_q}e^{i_1}e^{i_2} \ldots e^{i_p}, \tag{20}$$

donde todos los índices varían desde 1 hasta p, constituyen la base del espacio T. El vector t de T se expresa mediante esta base en la forma

$$t = a^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p}e_{j_1}e_{j_2}\ldots e_{j_q}e^{i_1}e^{i_2}\ldots e^{i_p}.$$

Sus coordenadas, o sea, los números $a^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p}$, serán las coordenadas del tensor de tipo (p, q) en la base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ en el sentido de la primera definición del tensor.

1900. Demostrar que para cualquier base $e_1, \ldots, e_n$ de un espacio lineal n-dimensional V_n existe la única base conjugada $e^1, \ldots, e^n$ del espacio conjugado V_n^*, es decir, la base relacionada con la dada mediante las condiciones $e^j\,(e_i) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, donde δ_{ij} es el símbolo de Kronecker.

1901. Una función lineal $\varphi\,(x)$ en un espacio lineal n-dimensional V_n es un tensor covariante, o sea, tensor de tipo $(1, 0)$.

a) Hallar sus coordenadas a_i en la base dada e_i.

b) Mostrar que los números a_i son coordenadas de $\varphi\,(x)$ como de un vector del espacio conjugado V_n^* en la base e^i, conjugada a la base e_i del espacio V_n.

1902. Las coordenadas del vector x en una base dada del espacio

lineal n-dimensional V_n determinan el tensor contravariante de tipo (0, 1). Escribir este tensor en forma de una función polilineal.

1903. Sea $\varphi(x) = a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ una forma lineal respecto a las coordenadas del vector $x \in V_n$ en la base e_i. Mostrar que los coeficientes a_ia_j ($i, j = 1, 2, \ldots, n$) del cuadrado de esa forma dan el tensor covariante doble.

1904. Denominaremos matriz del tensor covariante doble a_{ij} en la base dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$ Hallar la ley del cambio de la matriz A al pasar a la nueva base.

1905. Denominaremos matriz de un tensor contravariante doble a^{ij} en la base dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & \ldots & a^{1n} \\ a^{21} & a^{22} & \ldots & a^{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^{n1} & a^{n2} & \ldots & a^{nn} \end{pmatrix}$. Hallar la ley del cambio de la matriz A al pasar a la nueva base.

1906. Sea a_i^j un tensor de tipo (1, 1) en un espacio lineal n-dimensional V_n. Considerando i el número de la columna y j, el número de la fila, obtendremos una matriz formada por las coordenadas de ese tensor

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_n^n \end{pmatrix}.$$ Hallar la ley del cambio de la matriz A al pasar a la nueva base.

1907. a) Mostrar que el símbolo de Kronecker δ_{ij} da en todas las bases de un espacio lineal n-dimensional un tensor de tipo (1, 1). b) Escribir este tensor en forma de una función polilineal.

1908*. Sea a_{ij} un tensor covariante doble en un espacio n-dimensional. Demostrar que:

a) si la matriz A del tensor a_{ij} en una base es regular, es también regular en cualquier base;

b) los elementos a^{ij} de la matriz inversa de la matriz A del tensor a_{ij} (en el caso cuando A es regular), forman un tensor contravariante doble.

1909. Sean Ax una transformación lineal y $\varphi(x)$ una función lineal en un espacio lineal n-dimensional V_n. Mostrar que la función $F(x; \varphi) = \varphi(Ax)$ es un tensor de tipo (1, 1), cuya matriz en cualquier base coincide con la matriz de la transformación lineal Ax en la misma base.

1910. Demostrar que los elementos de la matriz de una función bilineal $F(x, y)$ en un espacio lineal n-dimensional forman un tensor de tipo (2, 0), es decir, doble covariante.

1911. Demostrar que los elementos de la matriz de una transformación lineal en la base dada forman un tensor de tipo (1, 1).

1912. Supongamos que en un espacio lineal n-dimensional V_n se dan p vectores $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Escribamos las coordenadas de estos vectores en cierta base según las filas de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_p^1 & a_p^2 & \ldots & a_p^n \end{pmatrix}.$$

a) Mostrar que los números

$$a^{i_1 i_2 \ldots i_p} = \begin{vmatrix} a_1^{i_1} & a_1^{i_2} & \ldots & a_1^{i_p} \\ a_2^{i_1} & a_2^{i_2} & \ldots & a_2^{i_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_p^{i_1} & a_p^{i_2} & \ldots & a_p^{i_p} \end{vmatrix}$$

$(i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n)$ son coordenadas de un tensor p veces contravariante, es decir, tensor de tipo $(0, p)$ en la base dada. Este tensor se denomina *p-vector* (para $p = 1$, es *vector* y para $p = 2$, *bivector*).

b) Demostrar que el p-vector es nulo cuando, y sólo cuando, los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_p$ dados son linealmente dependientes (en particular, para $p > n$ todos los p-vectores son nulos).

c) Demostrar que dos sistemas linealmente independientes de p-vectores cada uno son equivalentes cuando, y sólo cuando, los p-vectores que les corresponden, se diferencian por el factor, distinto de cero.

d) Mostrar que si en calidad de tensores se comprenden las funciones polilineales (véase la introducción a este párrafo), el p-vector dado por los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_p$ del espacio V_n, puede definirse como una función polilineal respecto a p vectores $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^p$ de un espacio conjugado V_n^* prefijado mediante la igualdad

$$F(\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^p) = \begin{vmatrix} \varphi^1(x_1) & \varphi^2(x_1) & \ldots & \varphi^p(x_1) \\ \varphi^1(x_2) & \varphi^2(x_2) & \ldots & \varphi^p(x_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi^1(x_p) & \varphi^2(x_p) & \ldots & \varphi^p(x_p) \end{vmatrix}.$$

1913. Aclarar de qué modo cambian las coordenadas del tensor de tipo (p, q) al pasar de la base $e_1, \ldots, e_n$ a la base $e_1', \ldots, e_n'$ que se obtiene de la precedente mediante la siguiente sustitución $\pi(i) = k_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; esto significa que $e_i' = e_{\pi(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

1914. Hallar las coordenadas en una base $e_1, \ldots, e_n$ dada del tensor de tipo (n, n), prefijado por la igualdad

$$F(x_1, \ldots, x_n; \varphi^1, \ldots, \varphi^n) = \begin{vmatrix} \varphi^1(x_1) & \varphi^2(x_1) & \ldots & \varphi^n(x_1) \\ \varphi^1(x_2) & \varphi^2(x_2) & \ldots & \varphi^n(x_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi^1(x_n) & \varphi^2(x_n) & \ldots & \varphi^n(x_n) \end{vmatrix}.$$

1915. Sea $F(x_1, \ldots, x_n; \varphi^1, \ldots, \varphi^n)$ una función polilineal, antisimétrica tanto según los argumentos $x_1, \ldots, x_n$, como también según los argumentos $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$. Demostrar que sus valores en la base dada se expresan a través de las coordenadas mediante la fórmula

$$F(x_1, \ldots, x_n; \varphi^1, \ldots, \varphi^n) = \det(x) \det(\varphi) \times$$
$$\times F(e_1, \ldots, e_n; e^1, \ldots, e^n),$$

donde e^i es la base conjugada a la e_i, $\det(x)$ es el determinante formado por las coordenadas de los vectores $x_1, \ldots, x_n$ en la base $e_1, \ldots, e_n$ y $\det(\varphi)$ es el determinante formado por las coordenadas de los vectores $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ en la base $e^1, \ldots, e^n$.

1916. Supongamos que se da un tensor de tipo (p, q) en forma de una función polilineal $F(x_1, \ldots, x_p; \varphi^1, \ldots, \varphi^q)$. Su *contracción* respecto a los números $k \leqslant p$, $l \leqslant q$ es la suma

$$\sum_{i=1}^{n} F(x_1, \ldots, x_{k-1}, e_i, x_{k+1}, \ldots, x_p;$$
$$\varphi^1, \ldots, \varphi^{l-1}, e^l, \varphi^{l+1}, \ldots, \varphi^q).$$

Mostrar que la contracción no depende de la base y es un tensor de tipo $(p-1, q-1)$. Se supone que $p, q > 0$.

1917. Se dan un tensor simétrico a_{ij} y otro antisimétrico b^{ij}. Hallar su contracción total $a_{ij}b^{ij}$.

1918*. Para estudiar el producto tensorial (véase la introducción a este párrafo) es cómodo utilizar el concepto de contracción en el siguiente sentido. Para mayor sencillez examinemos el producto tensorial de dos espacios lineales: $T = V \times V'$, donde V y V' son espacios lineales sobre un mismo campo P.

Se denomina *contracción de la suma* $x_1x_1' + \ldots + x_kx_k'$, donde $x_i \in V$, $x_i' \in V'$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, con el vector φ del espacio V^*, conjugado con el espacio V, el vector $\alpha_1x_1' + \ldots + \alpha_kx_k' \in V'$, donde $\alpha_i = \varphi(x_i) \in P$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Se determina de modo análogo la contracción de la misma suma con el vector $\varphi' \in V'^*$; ella es vector de V.

a) Demostrar que si dos sumas del tipo señalado arriba, son equivalentes, sus contracciones son iguales. Eso permite determinar la contracción $\varphi(t) \in V'$ para $t \in T$, $\varphi \in V^*$.

b) Para que el par xx' sea equivalente al par $00'$, donde 0 y $0'$ son vectores nulos de V y V', respectivamente, es necesario y suficiente que se cumpla por lo menos una de las condiciones $x = 0$, $x' = 0'$.

c) Si $x_1x'_1 + \ldots + x_kx'_k \sim 00'$ y los vectores $x'_1, \ldots, x'_k$ son linealmente independientes,

$$x_1 = \ldots = x_k = 0.$$

d) Las clases de las sumas equivalentes que contienen los pares $e_ie'_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n'$), donde $e_1, \ldots, e_n$ es la base de V y $e'_1, \ldots, e'_{n'}$, la base de V', forman la base de T.

1919. Demostrar que los productos tensoriales de los espacios lineales de todos los polinomios respecto a x y de todos los polinomios respecto a y con los coeficientes del campo P es un espacio de todos los polinomios con respecto a dos indeterminadas x, y con los coeficientes de P.

1920. Demostrar que el producto tensorial del espacio de los polinomios $f(x)$ de grado $\leqslant n$ y del espacio de los polinomios $g(y)$ de grado $\leqslant s$ con los coeficientes del campo P es un espacio de polinomios $h(x, y)$, cuyo grado $\leqslant n$ según x y $\leqslant s$ según y con los coeficientes del campo P.

1921. Demostrar las afirmaciones:

a) para cualquier base e_i de un espacio euclídeo n-dimensional E_n (o de un espacio con la métrica cuadrática M_n) existe la única base recíproca e^i del espacio E_n (M_n, respectivamente), relacionada con la base dada mediante las igualdades $(e_i, e^j) = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$) (mediante las igualdades (8), respectivamente, de la introducción a este párrafo);

b) la base recíproca se expresa mediante la base dada empleando las fórmulas $e^i = g^{i\alpha} e_\alpha$ ($i = 1, 2, \ldots, n$);

c) la base dada se expresa mediante la recíproca usando las fórmulas $e_i = g_{i\alpha}e^\alpha$ ($i = 1, 2, \ldots, n$);

d) los tensores métricos g_{ij} y g^{ij} están relacionados mediante las igualdades $g_{i\alpha}g^{j\alpha} = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$);

e) si las matrices de los tensores métricos se designan por $G = (g_{ij})_1^n$ y $G_1 = (g^{ij})_1^n$, y los determinantes de estas matrices por $g = |g_{ij}|_1^n$ y $g_1 = |g^{ij}|_1^n$, entonces $GG_1 = E$, $gg_1 = 1$.

1922. Demostrar que las coordenadas covariantes y contravariantes de un mismo vector en la base dada de un espacio euclídeo están relacionadas mediante las igualdades:

a) $x_i = g_{i\alpha}x^\alpha$ ($i = 1, 2, \ldots, n$);

b) $x^i = g^{i\alpha}x_\alpha$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).

1923. En un sistema cartesiano rectangular de coordenadas se dan dos vectores

$$e_1 = (1, 0),\ e_2 = (\cos\alpha,\ \operatorname{sen}\alpha),\ \operatorname{sen}\alpha \neq 0;$$

a) comprobar que estos vectores forman una base;

b) hallar el tensor métrico covariante g_{ij} en la base e_1, e_2;

c) hallar el tensor métrico contravariante g^{ij} en la base e_1, e_2;

d) hallar la expresión de los vectores de una base recíproca e^1, e^2 a través de la base e_1, e_2 y sus coordenadas en el sistema rectangular inicia ;

e) escribir la expresión del producto escalar (x, y) de dos vectores por medio de sus coordenadas en la base e_1, e_2;

f) hallar el tensor discriminante ε_{ij} en la base e_1, e_2;

g) escribir la expresión del área orientada de un paralelogramo construido sobre los vectores x, y mediante el tensor discriminante ε_{ij} y el determinante formado por las coordenadas en la base e_1, e_2.

1924*. Sean e_1, e_2 cualquier base del plano, g^{ij} un tensor métrico contravariante y ε_{ij} un tensor discriminante en esa base. El vector $y = y^i e_i$, donde $y^i = g^{ij}\varepsilon_{jh}x^h$, está construido según el vector $x = x^i e_i$ dado. Aclarar en qué medida el vector y depende de la elección de la base y cuál es la relación geométrica de los vectores x e y.

1925. En un espacio euclídeo cuadridimensional se da un tensor contravariante doble a^{kl}. ¿De qué modo cambian las magnitudes $b_{ij} = \varepsilon_{ijkl}a^{kl}$, $(i, j = 1, 2, 3, 4)$, al variar la base?

1926*. Supongamos que en cierta base de un espacio euclídeo n-dimensional E_n se da un tensor a_{ijk} de tipo (3, 0), g_{ij} y g^{ij} son tensores métricos. Determinemos el tensor a_k^{ij} de tipo (1, 2) mediante las igualdades: $a_k^{ij} = g^{i\alpha}g^{j\beta}\, a_{\alpha\beta k}$ $(i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$. Expresar a_{ijk} a través de a_k^{ij}.

1927. Un espacio euclídeo tridimensional se determina mediante el tensor métrico con la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Hallar las longitudes de los segmentos cortados por el plano $\frac{x^1}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{5} = 1$ en los ejes de las coordenadas.

1928*. La métrica de un espacio euclídeo tridimensional se determina por medio de un tensor métrico g_{ij} con la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Hallar el área S de un triángulo con vértices A (1, 0, 1), B (2, 1, 1), C (3, 1, 2) y la altura h bajada desde C sobre AB si las coordenadas y el tensor se dan en la misma base.

1929*. Un espacio euclídeo tridimensional está determinado mediante un tensor métrico g_{ij} con la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Hallar el pie de la perpendicular PQ bajada del punto P (1, —1, 2) sobre el plano $x^1 + x^2 + 2x^3 + 2 = 0$.

1930*. En un espacio euclídeo cuadridimensional E_4 se dan tres vectores x, y, z y se construye un vector u con las coordenadas covariantes $u_i = \varepsilon_{ijkl}x^jy^kz^l$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, donde ε_{ijkl} es un tensor discriminante en la misma base (un análogo cuadridimensional del producto vectorial, véase el problema 1938). Demostrar que:

a) el vector u es ortogonal a cada uno de los vectores x, y, z;

b) si los vectores x, y, z son linealmente independientes, la longitud $|u|$ del vector u es igual al volumen tridimensional $V(x, y, z)$

de un paralelepípedo construido sobre x, y, z; pero si x, y, z son linealmente dependientes, $u = 0$.

1931. Hallar la contracción total $g_{ij}g^{ij}$ de los tensores métricos del espacio euclídeo n-dimensional E_n.

1932. Determinemos el tensor discriminante contravariante de un espacio euclídeo n-dimensional E_n mediante las fórmulas $\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n} = (-1)^s \sqrt{g_1}$, donde $g_1 = |g^{ij}|_1^n$, y s es el número de inversiones en la permutación $i_1, i_2, \ldots, i_n$ y $\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n} = 0$, si por lo menos dos de los índices de $i_1, i_2, \ldots, i_n$ coinciden. Demostrar que:

a) el volumen orientado de un paralelepípedo construido sobre los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (véase la introducción a este párrafo) se expresa mediante las igualdades:

$$V_e(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt{g_1} \det{}_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n} x^1_{i_1} x^2_{i_2} \ldots x^n_{i_n},$$

donde $\det_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es un determinante formado por las coordenadas covariantes de los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y x^s_i es la i-ésima coordenada covariante del vector x_s;

b) $\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n} = g^{i_1\alpha_1} g^{i_2\alpha_2} \ldots g^{i_n\alpha_n} \varepsilon_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n}$;

c) $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} = g_{i_1\alpha_1} g_{i_2\alpha_2} \ldots g_{i_n\alpha_n} \varepsilon^{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n}$.

1933. Calcular la contracción de los tensores discriminantes $\varepsilon_{ijh}\varepsilon^{ijk}$ de un espacio euclídeo tridimensional.

1934. En la base e_1, e_2, e_3 de un espacio real tridimensional se da un tensor métrico covariante g^{ij} con la matriz

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Comprobar que el espacio es euclídeo;

b) hallar la matriz G_1 del tensor métrico contravariante g^{ij};

c) hallar las coordenadas contravariantes del versor de la normal al plano prefijado en la misma base mediante la ecuación $3x^1 + 2x^2 - 3x^3 - 5 = 0$.

1935*. Demostrar que el cuadrado del volumen orientado de un paralelepípedo construido sobre n vectores del espacio euclídeo n-dimensional, es igual al determinante de Gram de esos vectores.

1936. Supongamos que en un espacio euclídeo n-dimensional se da un hiperplano π determinado mediante la ecuación $a_1x^1 + \ldots + a_nx^n + b = 0$, y un punto $M(x_0^1, \ldots, x_0^n)$.

a) Mostrar que el vector p con coordenadas covariantes $a_1, \ldots, a_n$ es perpendicular al plano π;

b) la distancia d del punto M al plano π se expresa mediante la fórmula

$$d = \frac{|a_1x_0^1 + \ldots + a_nx_0^n + b|}{|p|}.$$

1937*. Hallar la distancia desde el punto $M(x_0, y_0)$ en el espacio euclídeo hasta la recta $ax + by + c = 0$ si las coordenadas se dan en la base

$$e_1 = \{1, 0\}, \; e_2 = \{\cos \omega, \; \operatorname{sen} \omega\}, \; \operatorname{sen} \omega \neq 0$$

(las coordenadas de los vectores de la base se dan en el sistema cartesiano rectangular de coordenadas).

1938*. Sean ε_{ijk} un tensor discriminante de un espacio euclídeo tridimensional, x^i, y^i coordenadas contravariantes de los vectores $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ en cierta base. Demostrar que el vector $\boldsymbol{z}$, cuyas coordenadas covariantes en la misma base se dan mediante las fórmulas $z_i = \varepsilon_{i\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$ $(i = 1, 2, 3)$, es un producto vectorial de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.

RESPUESTAS

Parte I. Determinantes

1. 1. **2.** —2. **3.** —1. **4.** 0. **5.** 0. **6.** —1. **7.** $4ab$. **8.** $-2b^3$. **9.** 1. **10.** sen $(\alpha - \beta)$. **11.** cos $(\alpha + \beta)$. **12.** 0. **13.** 1. **14.** 1. **15.** —1. **16.** 1. **17.** 0. **18.** $ab - c^2 - d^2$. **19.** $(a - b)^2$. **20.** 0. **21.** $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. **22.** $x = 3$; $y = -1$. **23.** $x = 5$; $y = 2$. **24.** $x = {}^2/_3$; $y = {}^1/_3$. **25.** $x = 2$; $y = -3$. **26.** $x = \cos(\beta - \alpha)$; $y = \operatorname{sen}(\beta - \alpha)$. **27.** $x = \cos\alpha \cos\beta$; $y = \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$.

28. El sistema es indeterminado, las fórmulas de Cramer no dan una respuesta correcta, ya que según ellas, x e y son iguales a $^0/_0$, es decir, pueden tomar valores arbitrarios, mientras que están relacionadas mediante la ecuación $2x + 3y = 1$, de donde, sabiendo el valor de una de las incógnitas, se determina el valor único de la segunda.

29. El sistema es contradictorio.

30. Para $a \neq b$ la ecuación está determinada, para $a = b \neq c$, es contradictoria y para $a = b = c$, es indeterminada.

31. Para $\alpha = k\pi$, donde k es un número entero, la ecuación es contradictoria, para los demás valores de α es determinada.

32. Para $\alpha = 2k\pi$, donde k es un número entero, la ecuación es contradictoria, para $\alpha = (2k + 1)\pi$, es indeterminada y para los demás valores de α, está determinada.

33. Para $\alpha + \beta \neq k\pi$, donde k es un número entero, la ecuación está determinada, para $\alpha + \beta = 2k\pi$ y para $\alpha + \beta = (2k_1 + 1)\pi$, $\alpha = k_2\pi$, donde k_1 y k_2 son números enteros, la ecuación está indeterminada y para $\alpha + \beta = (2k_1 + 1)\pi$, $\alpha \neq k_2\pi$, es contradictoria.

34. Para $a \neq 0$ el sistema está determinado, para $a = b = 0$, está indeterminado y para $a = 0 \neq b$ es contradictorio.

35. Para $ac - b^2 \neq 0$ el sistema está determinado, para $ac - b^2 = 0$, está indeterminado. El sistema no puede ser contradictorio.

36. Para $a \neq \pm 6$ el sistema está determinado, para $a = 6$, está indeterminado y para $a = -6$, es contradictorio.

37. Para $ab \neq 90$, el sistema está determinado, para $a = 6$, $b = 15$, está indeterminado y para $ab = 90$, pero $a \neq 6$ y $b \neq 15$, es contradictorio.

39. Indicación. Cerciorarse de que en la fórmula de las soluciones de la ecuación cuadrada el radicando es positivo.

40. Solución. Supongamos que dicho trinomio es un cuadrado perfecto, o sea, $ax^2 + 2bx + c = (px + q)^2$. Al comparar los coeficientes de x de iguales potencias, hallamos $a = p^2$, $b = pq$, $c = q^2$, de donde $ac - b^2 = p^2q^2 - (pq)^2 = 0$. Supongamos lo contrario, $ac - b^2 = 0$. Entonces

$$ax^2 + 2bx + c = \frac{1}{a}(a^2x^2 + 2abx + ac) = \frac{1}{a}[(ax + b)^2 + (ac - b^2)] = \frac{1}{a}(ax + b)^2$$

es un cuadrado perfecto, ya que del número complejo $^1/a$ puede extraerse la raíz cuadrada.

42. Solución. Si $\frac{ax + b}{cx + d} = q$ para cualquier x, $ax + b = q(cx + d)$, $a = qc$, $b = qd$ y $ad - bc = 0$, viceversa, si $ad - bc = 0$, entonces para $c \neq 0 \neq d$ tenemos $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = q$, $a = qc$, $b = qd$. Para $c = 0 \neq d$ será $a = 0$ y, poniendo

$q = \frac{b}{d}$, tenemos de nuevo $a = qc$, $b = qd$. Para $c \neq 0 = d$ obtendremos lo mismo, poniendo $q = \frac{a}{c}$. Por ello $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{q(cx+d)}{cx+d} = q$ para x cualesquiera.

43. 40. **44.** -3. **45.** 100. **46.** -5. **47.** 0. **48.** 1. **49.** 1. **50.** 2. **51.** 4. **52.** -8. **53.** 6. **54.** 20. **55.** 0. **56.** $3abc - a^3 - b^3 - c^3$. **57.** $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$. **58.** 0. **59.** $2x^3 - (a+b+c)x^2 + abc$. **60.** $(ab+bc+ca)x + abc$. **61.** $1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$. **62.** 1. **63.** $\operatorname{sen}(\beta-\gamma) + \operatorname{sen}(\gamma-\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)$. **66.** $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. **66.** -2. **67.** $xyz + 2(ace - bcf + adf + bde) - x(e^2+f^2) - y(c^2+d^2) - z(a^2+b^2)$.

68. 0. **69.** -3. **70.** $3i\sqrt{3}$.

72. 4. **Indicación.** Todos los seis términos del determinante no pueden ser igual a $+1$, ya que entonces el producto de los tres términos: $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$ sería igual al producto de los otros tres términos restantes, mientras que el primero de esos productos es igual al producto de todos los nueve elementos del determinante y el segundo, al mismo producto de los nueve elementos con signo opuesto. Luego, cerciorarse de que el determinante se diferencia de 5 y que

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

73. 2. **Indicación.** Mostrar que todos los tres términos positivos que entran en el determinante, no pueden ser iguales a 1, y tener en cuenta que

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

74. $x = 3, y = -2, z = 2$. **75.** $x = y = z = 1$. **76.** $x = 1, y = 2, z = -1$. **77.** $x = 2, y = -3, z = -2$.

78. $x = -a$, $y = b$, $z = c$. **Indicación.** Poner $\frac{x}{a} = x'$; $\frac{y}{b} = y'$; $\frac{z}{c} = z'$.

79. $x = bc$, $y = ac$, $z = ab$.

80. $x = a$, $y = 2b$, $z = 3c$. **Indicación.** Dividir cada una de las ecuaciones por abc y poner $\frac{x}{a} = x'$; $\frac{y}{b} = y'$; $\frac{z}{c} = z'$.

81. $x = \frac{a+b+c}{3}$; $y = \frac{a+b\varepsilon^2+c\varepsilon}{3}$; $z = \frac{a+b\varepsilon+c\varepsilon^2}{3}$. **Indicación.** Este sistema puede resolverse por medio de las fórmulas de Cramer. Es más sencillo primero sumar todas las ecuaciones, luego sumarlas después de multiplicar la segunda ecuación por ε^2 y la tercera, por ε, y por fin, sumarlas después de multiplicar la segunda ecuación por ε y la tercera, por ε^2. Usar la relación $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$.

82. El sistema es indeterminado, puesto que la tercera ecuación es la suma de las otras dos, y por lo tanto, cualquier solución de las dos primeras ecuaciones satisface la tercera. Las primeras dos ecuaciones tienen una cantidad infinita de soluciones, por ejemplo, x e y se expresan mediante z de la siguiente manera: $x = 10z + 1$, $y = 7z$. Dándole a z un valor arbitrario, hallaremos los valores de x e y.

83. El sistema está indeterminado.

84. El sistema es contradictorio, ya que si para ciertos valores numéricos de las incógnitas todas las ecuaciones del sistema se convirtiesen en igualdad, obtendríamos, restando la primera igualdad de la suma de las demás, de nuevo una igualdad. Pero se obtiene $0 = 4$.

85. El sistema es contradictorio.

86. Para $a^3 \neq 27$ el sistema está determinado, para $a^3 = 27$, es contradictorio.

87. Para $4a^3 - 45a + 58 \neq 0$ el sistema está determinado y para $4a^3 - 45a + 58 = 0$, es contradictorio.

88. Para $ab \neq 15$ el sistema está determinado, para $a = 3$, $b = 5$, está indeterminado y para $ab = 15$, pero $a \neq 3$, $b \neq 5$, es contradictorio.

89. Para $ab \pm 12$ el sistema está determinado, para $a = 3$, $b = 4$, está indeterminado y para $ab = 12$, pero $a \neq 3$, $b \neq 4$, es contradictorio.

99. **Indicación.** Examinar un determinante, en el cual las primeras dos filas no son proporcionales (por ejemplo, ni una de estas filas debe contener sólo ceros), y la tercera fila es igual a la suma de las primeras dos, es decir, cada uno de sus elementos es igual a la suma de los correspondientes elementos de las primeras dos filas.

100. 0. **101.** 0. **102.** 0. **103.** 0. **104.** 0. **105.** 0. **106.** 0. **107.** 0. **108.** 0.

109. 0. Dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) del plano yacen en una recta, cuyo punto divide el segmento entre ellos en una relación dada λ.

110. 0. **Indicación.** A la primera fila añadir la segunda y tercera y usar la fórmula de Viète.

120. **Indicación.** A la tercera columna del determinante que se encuentra en el primer miembro de la igualdad, añadir la segunda, multiplicada por $a + b + c$ y restar la primera, multiplicada por $ab + bc + ca$.

123. 5. **124.** 8. **125.** 13. **126.** 18. **127.** $\frac{n(n-1)}{2}$. **128.** $\frac{n(n+1)}{2}$.

129. $\frac{3n(n-1)}{2}$ inversiones. La permutación es par para n igual a $4k$, $4k + 1$, e impar, para n igual a $4k + 2$, $4k + 3$, donde k es cualquier número no negativo entero.

130. $\frac{3n(n+1)}{2}$ inversiones. La permutación es par para $n=4k$, $4k+3$, e impar para $n = 4k + 1$, $4k + 2$, donde k es cualquier número no negativo entero.

131. $\frac{n(3n+1)}{2}$ inversiones. La permutación es par para $n=4k$, $4k+1$ e impar para $n = 4k + 2$, $4k + 3$, donde k es cualquier número no negativo entero.

132. $\frac{n(3n-1)}{2}$ inversiones. La permutación es par para $n=4k$, $4k+3$, e impar para $n = 4k + 1$, $4k + 2$, donde k es cualquier número no negativo entero.

133. $3n(n - 1)$ inversiones. La permutación es par para cualquier n.

134. $n(3n - 2)$ inversiones. La paridad de la permutación coincide con la de n.

135. $n(5n + 1)$ inversiones. La permutación es par para cualquier n.

136. En la permutación $n, n - 1, n - 2, \ldots, 3, 2, 1$. El número de inversiones en ésta es igual a

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

137. $k - 1$. **138.** $n - k$. **139.** C_n^k.

140. Para $n = 4k$, $4k + 1$, la paridad es igual y para $n = 4k + 2$, $4k + 3$, es opuesta. Aquí k es cualquier número no negativo entero.

141. **Solución.** Tomamos dos elementos cualesquiera a_i, a_j en dicha permutación $(i < j)$.

Si en esta permutación dichos elementos forman un orden, en la disposición inicial a_i se encuentra antes que a_j, y los índices i, j formarán un orden. Pero si en dicha permutación los elementos a_i, a_j forman una inversión, en la disposición inicial a_j está antes que a_i, por ello sus índices j, i forman también una inversión.

Por eso las inversiones de dicha permutación corresponden biunívocamente

a las inversiones de la permutación de los índices de los elementos, siendo la disposición de estos elementos normal, y por lo tanto, la cantidad de unas y otras inversiones es la misma.

142. Indicación. En la permutación $a_1, a_2, \ldots, a_n$ el elemento b_1 lo pasamos al primer lugar, en la permutación obtenida pasamos b_2 al segundo lugar, etc.

143. Por ejemplo: $2, 3, 4, \ldots, n, 1$ ó $n, 1, 2, \ldots, n-1$. **Indicación.** Al demostrar, utilizar el hecho de que una transposición puede reducir la cantidad de elementos que están en la permutación más a la derecha (a la izquierda) de su lugar en la disposición normal, pero no más de una unidad.

144. Indicación. En la permutación $a_1, a_2, \ldots, a_n$ el elemento b_1 pasarlo, mediante transposiciones contiguas, al primer lugar, en la permutación obtenida pasar el elemento b_2 mediante transposiciones contiguas al segundo lugar, etc.

145. $C_n^2 - k$. **146.** $\frac{1}{2}\ n!C\,\frac{2}{n}$. **Indicación.** Hacer uso del problema anterior.

147. Indicación. Pasar 1 al primer lugar mediante transposiciones contiguas, luego 2 al segundo lugar, etc. Tener en cuenta que una transposición contigua varía la cantidad de inversiones en una unidad.

148. Indicación. Examinar una serie de permutaciones que comienza por la permutación de $1, 2, \ldots, n$, obtenida mediante varias transposiciones: primero pasamos la unidad al último lugar, permutándola cada vez a la derecha, luego mediante el mismo procedimiento pasamos la cifra dos al penúltimo lugar, etc., hasta lograr a la permutación $n, n-1, \ldots, 2, 1$.

La afirmación puede demostrarse también mediante la inducción según el número k.

149. Solución. Para deducir la relación recurrente, observemos que si en la permutación con k inversiones el número $n+1$ se encuentra en el último lugar, todas las k inversiones se forman mediante los números $1, 2, \ldots, n$, y la cantidad de semejantes permutaciones será (n, k); si $(n+1)$ está en el penúltimo lugar, aquél forma una inversión, y los números $1, 2, \ldots, n$ forman $k-1$ inversiones, y la cantidad de semejantes permutaciones será $(n, k-1)$, etc.; por fin, si $n+1$ se halla en el primer lugar, él forma n inversiones (ello es posible sólo para $k \geqslant n$), y los números $1, 2, \ldots, n$ forman $k-n$ inversiones, y la cantidad de semejantes permutaciones será $(n, k-n)$.

Ordenando los números (n, k) en la tabla según las filas con n dado y según las columnas con k dado, vemos de la relación recurrente que cada número de la $(n+1)$-ésima fila es igual a la suma de $n+1$ números de la fila anterior, contándolos a la izquierda del número que se halla sobre el buscado (incluyendo también los números, iguales a cero). Para comodidad de la lectura de los lugares se escriben también los valores nulos de (n, j) para $j > C_n^2$ y, considerando que $(1, 0) = 1$, $(1, j) = 0$ para $j \geqslant 1$, obtenemos la tabla de los valores de (n, k):

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	3	5	6	5	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	4	9	15	20	22	20	15	9	4	1	0	0	0	0	0
6	1	5	14	29	49	71	90	101	101	90	71	49	29	14	5	1

Por ejemplo, la cantidad de permutaciones de seis elementos con siete u ocho inversiones es igual a 101.

150. Indicación. En todas las permutaciones sustituir la disposición indicada por la inversa.

151. (1 4 2) (3 5). El decremento es igual a 3. La sustitución es impar.

152. (1 6 3) (2 5) (4). La sustitución es impar.

153. (1 8 2) (3) (4 6 7) (5). La sustitución es par.

154. (1 5) (2 8 6 4) (3 9 7). La sustitución es par.

155. (1 2 3 4 5 6 7 8 9). La sustitución es par.

156. (1 4) (2 5) (3 6). La sustitución es impar.

157. (1 2) (3 4) . . . $(2n-1, 2n)$. El decremento es igual a n. La paridad de la sustitución coincide con la del número n.

158. (1 3) (2) (4 6) (5) . . . $(3n-2, 3n)$ $(3n-1)$. El decremento es igual a n. La paridad de la sustitución coincide con la del número n.

159. (1, 3, 5, . . ., $2n-1$) (2, 4, 6, . . ., $2n$). El decremento es igual a $2n-2$. La sustitución es par.

160. (1, 2, 3) (4, 5, 6) . . . $(3n-2, 3n-1, 3n)$. El decremento es igual a $2n$. La sustitución es par.

161. (1, 4, 7, . . ., $3n-2$) (2, 5, 8, . . ., $3n-1$) (3, 6, 9, . . ., $3n$). El decremento es igual a $3n-3$. La paridad de la sustitución es opuesta a la del número n.

162. $(1,\ k+1,\ 2k+1, \ldots, nk-k+1)$ $(2,\ k+2,\ 2k+2, \ldots$ $\ldots, nk-k+2)$ . . . $(k, 2k, 3k, \ldots, nk)$. El decremento es igual a $nk-k$. La sustitución es par cuando k es par y cuando, k y n son impares. Es impar, siendo k impar y n par.

163. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$. **164.** $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$.

165. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 7 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 & 5 & 8 & 9\end{pmatrix}$. **166.** $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 2n-1 & 2n\\ 2 & 1 & 4 & 3 & \ldots & 2n & 2n-1\end{pmatrix}$.

167. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 2n-1 & 2n\\ 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & 2n & 1\end{pmatrix}$.

168.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3n-2 & 3n-1 & 3n\\ 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & \ldots & 3n & 3n-2 & 3n-1\end{pmatrix}.$$

169. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$. **170.** $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4\end{pmatrix}$.

171. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$. **172.** $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$. **173.** $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1\end{pmatrix}$.

176. A. **Indicación.** Hacer uso del problema anterior.

177. Sustitución idéntica de E.

178. $X=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$.

181. Indicación. Situar los números de la primera fila de la sustitución en orden creciente y pasar de la sustitución idéntica a la dada mediante varias transposiciones en la segunda fila.

182. Indicación. Con el fin de demostrar la existencia del desarrollo en transposiciones en el número igual al decremento, es necesario multiplicar la sustitución por la transposición de los números que entran en un ciclo, y usar el problema 180. Para demostrar el carácter mínimo del número de transposiciones observemos que al multiplicar por una transposición, el decremento no puede aumentar más que en una unidad.

183. Indicación. Si $P = P_1P_2 \ldots P_s$ es cualquier desarrollo de la sustitución de P en transposiciones, hay que emplear la igualdad

$P = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \cdot P_1 P_2 \dots P_s$ y los problemas 179, 182.

184. Solución. Si X es una sustitución, permutable con S, $SX = XS$, de donde $X^{-1}SX = S$. Desarrollemos S en ciclos $S = (1\ 2)(3\ 4) = X^{-1}(1\ 2)XX^{-1}(3\ 4)X$. Calculando directamente nos cercioramos de que $X^{-1}(1\ 2)X$ es de nuevo un ciclo de longitud 2, obtenido del ciclo $(1, 2)$ sustituyendo los números 1 y 2 por los que les corresponden en la sustitución X. Esto mismo es válido para el ciclo $(3\ 4)$. Así, pues, la sustitución X debe convertir los ciclos de S en ciclos de la misma longitud, pero en virtud de que el desarrollo S en ciclos es único, los ciclos o se transforman en sí mismo, o bien uno en otro. Ya que cada ciclo de longitud dos puede escribirse de dos maneras: $(1\ 2) = (2\ 1)$, $(3\ 4) = (4\ 3)$, todas las sustituciones, permutables con S, serán:

$$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&2&3&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&2&4&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 2&1&3&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 2&1&4&3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 3&4&1&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 3&4&2&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 4&3&1&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 4&3&2&1 \end{pmatrix}.$$

185. Las sustituciones buscadas:

$$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ 1&2&3&4&5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ 1&4&3&2&5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ 3&2&5&4&1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ 3&4&5&2&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ 5&2&1&4&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ 5&4&1&2&3 \end{pmatrix}.$$

186. Indicación. Mostrar que ninguno de los números $1, 2, \dots, m-1$ puede convertirse en cero y diferentes números se transforman en diferentes.

187. $\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 5&1&6&2&7&3&8&4 \end{pmatrix}$.

188. Entra con el signo menos. **189.** Entra con el signo más.
190. No es término del determinante. **191.** Entra con el signo menos.
192. No es término del determinante. **193.** Con el signo $(-1)^{n-1}$.
194. Con el signo $(-1)^n$.
195. Con el signo $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$.
196. Con el signo $(-1)^{3n} = (-1)^n$.
197. $i = 5$, $k = 1$. **198.** $i = 6$, $k = 2$.
199. $a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$.
200. $10x^4 - 5x^3$. **201.** Con el signo más.
202. Con el signo $(-1)^{C_n^2}$. **203.** $a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn}$.
204. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot a_{1n}a_{2,\,n-1} \dots a_{n1}$. **205.** 0.

207. Los números $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ serán las raíces. **Indicación.** Utilizar la afirmación de que el polinomio de grado n no puede tener más de n raíces diferentes.

208. $x = 0, 1, 2, \dots, n-1$. **209.** $a_{n-k+1,\,n-i+1}$. **210.** $a_{n-i+1,\,n-k+1}$.

211. Si n es par, la cantidad de elementos en los lugares pares e impares será la misma e igual a $\frac{1}{2}n^2$. Si n es impar, la cantidad de elementos en los lugares pares es igual a $^1/_2\,(n^2+1)$, y en los impares, $-\ ^1/_2\,(n^2-1)$.

212. El determinante se multiplicará por $(-1)^{n-1}$.
213. El determinante se multiplicará por $(-1)^{n(n-1)/2}$.

214. El determinante no cambiará.

215. El determinante no cambiará. **Indicación.** La transformación dada puede sustituirse por dos simetrías con respecto a las líneas medias vertical y horizontal y una simetría con respecto a la diagonal principal.

216. **Indicación.** Transponer el determinante.

217. **Indicación.** Transponer el determinante.

218. $n = 4m$, donde m es entero.

219. $n = 4m + 2$, donde m es entero.

221. El determinante se multiplicará por $(-1)^n$.

222. El determinante no cambiará. **Indicación.** Examinar el término general del determinante.

223. **Indicación.** Examinar la suma de los índices de todos los elementos que entran en el término general del determinante.

224. **Indicación.** Hacer uso del problema anterior.

229. El determinante se convierte en cero.

230. El determinante se convierte en cero si es de orden par y se duplicará, si es de orden impar. **Indicación.** Desarrollar en una suma de los determinantes según cada columna.

231. El determinante se multiplicará por $(-1)^{C_n^2}$.

232. El determinante es igual a cero.

233. La cantidad de semejantes determinantes es $n!$ Su suma es nula.

234. 0. **236.** $8a + 15b + 12c - 19d$. **237.** $2a - 8b + c + 5d$.

238. $abcd$. **239.** $abcd$. **240.** $xyzuv$. **243.** 0.

244. **Indicación.** Multiplicar la segunda columna del determinante en el primer miembro de la igualdad por yz, la tercera columna por xz y la cuarta por xy.

245. **Indicación.** Aplicando las fórmulas de Viète, transformar la n-ésima columna.

246. **Indicación.** Aplicando las fórmulas de Viète, transformar la n-ésima columna y colocarla en el $(i + 1)$-ésimo lugar.

247. **Indicación.** Desarrollar según la primera columna.

253. **Indicación.** Desarrollar según la tercera fila.

256. **Indicación.** Reducir al problema anterior.

257. -8. **258.** -3. **259.** -9. **260.** 18. **261.** 18.

262. 4. **263.** 90. **264.** 27. **265.** 17. **266.** -6. **267.** -10. **268.** 100.

269. 150. **270.** 52. **271.** 5. **272.** 10. **273.** 1. **274.** 100. **275.** 1.

276. $^1/_3$. **Indicación.** Reducir los elementos de cada fila a un común denominador y sacarlo del signo del determinante.

277. 1. **278.** $9\sqrt{10}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. **279.** $n!$ **280.** $n(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

281. $x_1(x_2 - a_{12})(x_3 - a_{23}) \ldots (x_n - a_{n-1,n})$.

282. $(-1)^{n(n-1)/2}b_1b_2 \ldots b_n$.

283. $2n + 1$. **284.** $(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)x^n$.

285. $x_1x_2 \ldots x_n\left(\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \ldots + \frac{a_n}{x_n}\right)$. **Indicación.** Sacar del signo del determinante x_i de la i-ésima columna y a cada una de las columnas añadirle todas las demás.

286. 1. **287.** $n(-1)^{n-1}$.

288. $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$. **Indicación.** De cada fila restar la anterior, después la última columna añadirla a las demás.

289. $(x - 1)(x - 2) \ldots (x - n + 1)$. **290.** $(-1)^n(x - 1)(x - 2) \ldots (x - n)$. **291.** $a_0(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$.

292. $(x - a - b - c)(x - a + b + c)(x + a - b + c)(x + a + b - c)$.

293. $(x^2 - 1)(x^2 - 4)$.

294. x^2z^2. **Indicación.** Al permutar las dos primeras filas y las dos primeras columnas, demostrar que el determinante no cambia al sustituir x por $-x$. Después de comprobar que para $x = 0$ el determinante se convierte en cero,

demostrar que el mismo se divide por x^2. Realizar los mismos razonamientos para z.

295. $a_1 b_n \prod_{i=1}^{n-1} (a_{i+1}b_i - a_i b_{i+1})$. **Indicación.** Obtener la relación $D_n = \frac{b_n}{b_{n-1}} (a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n) D_{n-1}$.

296. $a_0 x_1 x_2 x_3 \ldots x_n + a_1 y_1 x_2 x_3 \ldots x_n + a_2 y_1 y_2 x_3 \ldots x_n + \ldots + a_n y_1 y_2 y_3 \ldots y_n$. **Indicación.** Obtener la relación $D_{n+1} = x_n D_n + a_n y_1 \times y_2 \ldots y_n$. El determinante puede calcularse de otro modo: desarrollándolo según la primera fila.

297. $-a_1 a_2 \ldots a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right)$.

298. $a_1 a_2 \ldots a_n - a_1 a_2 \ldots a_{n-1} + a_1 a_2 \ldots a_{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} a_1 + (-1)^n$.

299. $n+1$. 300. $2^{n+1}-1$. 301. $\frac{5^{n+1}-2^{n+1}}{3}$. 302. $9-2^{n+1}$. 303. $5 \cdot 2^{n-1} - 4 \cdot 3^{n-1}$. 304. $\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$.

305. $x^n + (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) x^{n-1}$. **Indicación.** Los elementos que se hallan fuera de la diagonal principal representarlos en la forma $a_i = 0 + a_i$.

306. $(x_1 - a_1)(x_2 - a_2) \ldots (x_n - a_n) \left(1 + \frac{a_1}{x_1 - a_1} + \frac{a_2}{x_2 - a_2} + \ldots + \frac{a_n}{x_n - a_n} \right)$.

Indicación. Poner $x_i = (x_i - a_i) + a_i$.

307. $(a_1 - x_1)(a_2 - x_2) \ldots (a_n - x_n) - a_1 a_2 \ldots a_n$. **Indicación.** Poner en el ángulo izquierdo superior $0 = 1 - 1$ y representar el determinante como una suma de dos determinantes con respecto a la primera fila.

308. $(x_1 - a_1 b_1)(x_2 - a_2 b_2) \ldots (x_n - a_n b_n) \left(1 + \frac{a_1 b_1}{x_1} + \frac{a_2 b_2}{x_2} + \ldots + \frac{a_n b_n}{x_n} \right)$.

309. $(n-1)!$ 310. $b_1 b_2 \ldots b_n$. 311. $(-1)^{\frac{n^2-n+2}{2}} 2(n-2)!$ 312. $(-1)^{n-1} n!$

313. $x^n + (-1)^{n+1} y^n$. 314. 0. 315. $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (n+1)^{n-1}$.

316. $(-1)^{n-1}(n-1)$. 317. $(2n-1)(n-1)^{n-1}$.

318. $[a + (n-1) b] (a-b)^{n-1}$. 319. 1. 320. 1.

321. $(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$. 322. $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$.

323. $\frac{x^{n+1}-1}{(x-1)^2} - \frac{n+1}{x-1}$. 324. $\frac{nx^n}{x-1} - \frac{x^n-1}{(x-1)^2}$. 325. $\prod_{k=1}^{n} (1 - a_{kk} x)$.

326. $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} [a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n a_n]$.

327. $(-1)^{n-1} (n-1) x^{n-2}$.

328. $1!\,2!\,3! \ldots n! = 1^n 2^{n-1} 3^{n-2} \ldots n$.

329. $\prod_{k=1}^{n} k!$ 330. $\prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} (x_i - x_k)$.

331. $\prod_{1 \leqslant i < k \leqslant n+1} (a_i - a_k)$.

332. $2^{n(n-1)/2} \prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} \cos \frac{\varphi_i + \varphi_k}{2} \operatorname{sen} \frac{\varphi_i - \varphi_k}{2}$.

333. $2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1\leqslant i<k\leqslant n} \operatorname{sen}\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2}\operatorname{sen}\frac{\varphi_i-\varphi_k}{2}$.

334. $\prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1} (x_i-x_k)$.

335. $2^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1,0}a_{2,0}\dots a_{n-1,0} \prod_{1\leqslant i<k\leqslant n} \operatorname{sen}\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2}\operatorname{sen}\frac{\varphi_i-\varphi_k}{2}$.

336. $\frac{1}{1!\,2!\,3!\dots(n-1)!} \prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1} (x_i-x_k)$. 337. $(-1)^n\, 1!\,2!\dots n!$

338. $\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_i-1} \prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1} (x_i-x_k)$. 339. $1!\,3!\,5!\dots(2n-1)!$

340. $\prod_{1\leqslant i<k\leqslant n+1} (a_ib_k-a_kb_i)$. 341. $\prod_{1\leqslant i<k\leqslant n} \operatorname{sen}(\alpha_i-\alpha_k)$.

342. $a_1a_2\dots a_n \prod_{1\leqslant i<k\leqslant n+1} (x_iy_k-x_ky_i)$, donde a_i es el coeficiente de x^i en el polinomio $f_i(x, y)$.

343. $(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n} x_i \prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1} (x_i-x_k)\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_if'(x_i)}\right]$, donde $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$. **Indicación.** Desarrollar el determinante según la primera columna.

344. $(x_1+x_2+\dots+x_n)\prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1} (x_i-x_k)$. **Indicación.** En determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \\ 1 & z & z^2 & \dots & z^n \end{vmatrix}$$

calcularlo mediante dos procedimientos: desarrollándolo por la última fila y como el determinante de Vandermonde. En ambas expresiones igualar los coeficientes de z^{n-1}.

345. $x_1x_2\dots x_n\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}\right)\prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1} (x_i-x_k)$.

346. $\left(\sum x_{\alpha_1}x_{\alpha_2}\dots x_{\alpha_{n-s}}\right)\prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1} (x_i-x_k)$, donde la suma se toma por todas las combinaciones $n-s$ de los números $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-s}$ según los números $1, 2, \dots, n$.

347. $x_1x_2\dots x_n-(x_1-1)(x_2-1)\dots(x_n-1)\prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1} (x_i-x_k)$. **Indicación.** Representar el i-ésimo elemento de la primera columna como $1=x_i-(x_i-1)$ y el determinante representarlo en forma de la resta de dos determinantes.

348. $[2x_1x_2\dots x_n-(x_1-1)(x_2-1)\dots(x_n-1)\prod_{n\geqslant i>k\geqslant 1} (x_i-x_k)$. **Indicación.** Anotar la primera fila 1, 0, 0, ..., 0 y la primera columna de unidades, la primera columna restarla de las demás, la unidad en el ángulo superior iz-

quierdo representarla como 2 — 1 y representar el determinante en forma de una resta de dos determinantes con respecto a la primera fila.

349. $2^{(n-1)^2} \prod_{1 \leqslant i < k \leqslant n} \operatorname{sen} \frac{\varphi_i + \varphi_k}{2} \operatorname{sen} \frac{\varphi_i - \varphi_k}{2}$. **Indicación.** Hacer uso de que $\cos k\varphi$ se expresa mediante $\cos \varphi$ en forma de un polinomio que tiene el término de mayor grado igual a $2^{k-1} \cos^k \varphi$ (esto puede deducirse de la fórmula de Moivre y la igualdad $1 + C_k^2 + C_k^4 + \ldots = 2^{k-1}$).

350. $2^{n(n-1)} \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2 \ldots \operatorname{sen} \varphi_n \prod_{1 \leqslant i < k \leqslant n} \left(\operatorname{sen} \frac{\varphi_i + \varphi_k}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\varphi_i - \varphi_k}{2} \right)$.

Indicación. Demostrar que $\operatorname{sen} k\varphi$ puede representarse como un producto de $\operatorname{sen} \varphi$ por el polinomio con respecto a $\cos \varphi$ con el término de mayor grado $2^{k-1} \cos^{k-1} \varphi$.

351. $(a + b + c + d)(a + b - c - d)(a - b + c - d) \times \times (a - b - c + d)$. **Indicación.** Hacer uso del método de separación de factores lineales.

352. $(a + b + c + d + e + f + g + h)(a + b + c + d - e - f - - g - h)(a + b - c - d + e + f - g - h)(a + b - c - d - e - f + + g + h)(a - b + c - d + e - f + g - x)(a - b + c - d - e + f - - g + h)(a - b - c + d + e - f - g + h)(a - b - c + d - e + f + + g - h)$.

353. $(x + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$. **Indicación.** Utilizar la separación de los factores lineales o de cada fila restar la anterior y luego a cada columna añadir todas las posteriores.

354. 0 para $n > 2$; $D_1 = a_1 - b_1$; $D_2 = (a_1 - a_2) \times (b_1 - b_2)$.

355. 0 para $n > 2$; $D_1 = 1 + x_1 y_1$; $D_2 = (x_1 - x_2)(y_1 - y_2)$.

356. 0 para $n > 1$. **Indicación.** Desarrollar en una suma de determinantes con respecto a cada columna.

357. $1 + \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) + \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant n} (a_i - a_k)(b_k - b_i)$.

358. $(-1)^n \left[1 - n - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant n} (x_i - x_k)(y_i - y_k)\right]$.

Indicación. Utilizar el resultado del problema 355.

359. $x^n + x^{n-1} \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) + x^{n-2} \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant n} (a_i - a_k)(b_i - b_k)$.

Indicación. Desarrollar el determinante en una suma de dos determinantes con relación a cada columna y utilizar el resultado del problema 354.

360. $x_1 x_2 \ldots x_n \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{x_i}\right)$.

361. $(a^2 - b^2)^n$. **Indicación.** Deducir la relación recurrente $D_{2n} = (a^2 - b^2) D_{2n-2}$.

362. $\prod_{i=1}^{n} (a_i a_{2n+1-i} - b_i b_{2n+1-i})$. 363. $\frac{n+1}{x^n}$.

364. 0, si al dividir n por 6 obtenemos en el resto dos o cinco; 1, si n se divide por 6 y da en el resto una unidad; -1, si al dividir n por 6 tenemos en el resto 3 ó 4. La respuesta puede escribirse de otra manera:

$$D_n = \frac{C_{n+1}^1 - 3C_{n+1}^3 + 9C_{n+1}^5 - 27C_{n+1}^7 + \ldots}{2^n}$$

Indicación. Utilizar el método de relaciones recurrentes examinado en la introducción al presente párrafo.

365. **Indicación.** Obtener la relación recurrente $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$.

366. $5^{n+1} - 4^{n+1}$ 367. $\frac{i^n[1+(-1)^n]}{2}$, donde $i=\sqrt{-1}$, se decir, si n es impar, $D_n=0$, si n es par, $D_n=(-1)^{n/2}$.

368. $\frac{1}{2}[1+(-1)^n]$.

369. $D_n = \frac{1}{2^n}[C_{n+1}^1 a^n + C_{n+1}^3 a^{n-2}(a^2-4) + C_{n+1}^5 a^{n-4}(a^2-4)^2 + C_{n+1}^7 a^{n-6} \times$
$\times (a^2-4)^3 + \ldots] = a^n - C_{n-1}^1 a^{n-2} + C_{n-2}^2 a^{n-4} + \ldots + (-1)^k C_{n-k}^k a^{n-2k} + \ldots$

Indicación. La primera expresión se obtiene directamente del método de relaciones recurrentes; la segunda se demuestra fácilmente usando el método de inducción, aplicando la relación $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$.

370. $D_n = \frac{1}{2^n}[C_{n+1}^1 a^n + C_{n+1}^3 a^{n-2}(a^2+4) + \ldots + C_{n+1}^{2k+1} a^{n-2k}(a^2+4)^k +$
$+ \ldots] = a^n + C_{n-1}^1 a^{n-2} + C_{n-2}^2 a^{n-4} + \ldots + C_{n-k}^k a^{n-2k} + \ldots$

371. $2\cos n\alpha = (2\cos\alpha)^n - n(2\cos\alpha)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2!}(2\cos\alpha)^{n-4} -$
$- \frac{n(n-4)(n-5)}{3!}(2\cos\alpha)^{n-6} + \ldots = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{n}{n-k} C_{n-k}^k \times$
$\times (2\cos\alpha)^{n-2k}$, donde por $[n/2]$ se designa la parte entera del número $n/2$.

Indicación. Demostrar la igualdad de $\cos n\alpha$ al determinante dado mediante la inducción según n.

Prosiguiendo, si D_n es el determinante del problema dado y D_n^0 es el determinante del problema 369, pero sustituyendo a por $2\cos\alpha$, entonces $D_n = D_n^0 - \cos\alpha D_{n-1}^0$. El hecho de que los coeficientes en la expresión obtenida de $\cos n\alpha$ por medio de $\cos\alpha$ serán enteros se desprende de la igualdad $\frac{n}{n-k} \times$
$\times C_{n-k}^k = C_{n-k}^k - C_{n-k-1}^{k-1}$ que es fácil de comprobar, y de que todos los términos, a excepción del último, contienen el factor 2, mientras que el último término no posee 2 cos α sólo para n par, pero cuando $k = n/2$, este término también es igual a 2.

372. $\operatorname{sen} n\alpha = \operatorname{sen}\alpha\,[(2\cos\alpha)^{n-1} - C_{n-2}^1(2\cos\alpha)^{n-3} + C_{n-3}^2(2\cos\rho)^{n-5} -$
$- C_{n-4}^3(2\cos\alpha)^{n-7} + \ldots] = \operatorname{sen}\alpha \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-k-1}^k (2\cos\alpha)^{n-2k-1}$, donde $\left[\frac{n-1}{2}\right]$
es la parte entera del número $\frac{n-1}{2}$.

373. **Indicación.** Aplicar el método de las relaciones recurrentes.

374. $1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n}$. 375. $(-1)^{n(n-1)/2}\frac{n+1}{2}n^{n-1}$.

376. $(-nx)^{n-1}\left[a+\frac{(n-1)x}{2}\right]$. **Indicación.** De cada fila restar la si-

guiente, todas las columnas añadirlas a la posterior, y a la penúltima fila añadirle todas las anteriores y esa fila añadirla a todas las precedentes.

377. $(1-x^n)^{n-1}$.

378. Estos circulantes se diferencian sólo por el factor $(-1)^{(n-2)(n-1)/2}$.

379. 1. **Indicación.** Empleando la igualdad $\binom{n}{k}=\binom{n-k}{k}+\binom{n-1}{k-1}$, restar de cada columna la anterior, luego de cada fila restar la precedente.

380. 1. **Indicación.** Hacer uso de la indicación del problema anterior.

381. 1. **Indicación.** De cada fila restar la precedente.

382. 1. **Indicación.** De cada fila, comenzando por la segunda, restar la anterior, luego de cada fila, comenzando por la tercera, restar la anterior, etc.

383. $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$. **Indicación.** De cada columna, comenzando por la segunda, restar la anterior, luego de cada columna, comenzando por la tercera, restar la precedente, etc. En el determinante obtenido realizar lo mismo para las filas.

384. 1. **Indicación.** Hacer uso de la indicación del problema 382.

385. $\dfrac{\binom{m+n}{n+1}\binom{m+n-1}{n+1}\cdots\binom{m+n-p+1}{n+1}}{\binom{p+n}{n+1}\binom{p+n-1}{n+1}\cdots\binom{n+1}{n+1}}$. **Indicación.** Usando la relación $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}$, sacar del signo del determinante de la primera fila m, de la segunda $m+1$, etc., de la última, $m+n$; de la primera columna $\frac{1}{p}$, de la segunda, $\frac{1}{p+1}$, etc., de la última $\frac{1}{p+n}$. Con el determinante obtenido realizar las mismas transformaciones, etc., hasta obtener a un determinante del mismo tipo que en el problema anterior.

386. n. **Indicación.** De cada fila restar la anterior, desarrollar según los elementos de la primera columna, en el determinante obtenido de la primera columna restar la segunda, añadir la tercera, restar la cuarta, etc. Representar el determinante en forma de suma de dos determinantes y mostrar que $D_n=D_{n-1}+1$.

387. n. **Indicación.** De cada columna restar la anterior, luego de cada fila restar la precedente. El elemento 2 del ángulo superior izquierdo representarlo como $1+1$ y obtener la relación $D_{n-1}=D_{n-2}+D'_{n-1}$, donde D'_{n-1} es el determinante del mismo tipo que en el problema 379, pero de orden $n-1$.

388. $(x-1)^n$. **Indicación.** De cada fila restar la anterior y mostrar que $D_{n+1}=(x-1)D_n$.

389. $1!2!3!\ldots(n-1)!(x-1)^n$. **Indicación.** Reducirlo al problema anterior.

390. $x_n-\binom{n}{1}x_{n-1}+\binom{n}{2}x_{n-2}-\binom{n}{3}x_{n-3}+\ldots+(-1)^n x_0$. **Indicación.** De cada fila restar la anterior, mostrar que $D_{n+1}(x_0, x_1, \ldots, x_n)=D_n(x_1-x_0, x_2-x_1, \ldots, x_n-x_{n-1})$ y aplicar el método de la inducción matemática.

391. $(-1)^{n-1}xy\dfrac{x^{n-1}-y^{n-1}}{x-y}$. **Indicación.** Poner en el ángulo inferior derecho $0=x-x$, desarrollar en dos determinantes o bien aplicar el método de relaciones recurrentes, o bien hallar D_n de las dos igualdades:

$$D_n=-xD_{n-1}+x(-y)^{n-1},\quad D_n=-yD_{n-1}+y(-x)^{n-1}.$$

392. $\dfrac{x(a-y)^n-y(a-x)^n}{x-y}$.

393. $\dfrac{xf(y)-yf(x)}{x-y}$, donde $f(z)=(a_1-z)(a_2-z)\ldots(a_n-z)$.

394. $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$, donde $f(z)=(a_1-z)(a_2-z)\dots(a_n-z)$.

395. $\alpha^n+\beta^n$. 396. $a^n+a^{n-1}+\dots+a+1$.

397. $n!\,(a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_n)$. 398. $\frac{\operatorname{tg}^n\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}^n\frac{\alpha}{2}}{2}$.

399. $\prod_{k=1}^{n}(x+n-2k+1)$ ó $(x^2-1^2)(x^2-3^2)\dots[x^2-(n-1)^2]$, si n es par, y $x(x^2-2^2)(x^2-4^2)\dots[x^2-(n-1)^2]$, si n es impar. **Indicación.** A cada fila añadirle todas las demás, de cada columna restar la anterior y mostrar que si $D_n(x)$ es el determinante dado, $D_n(x)=(x+n-1)\,D_{n-1}(x-1)$.

400. 0, si $n>2$, $D_1=a^p-x$; $D_2=xa^p(a^2-1)(1-a)$.

401. $(-1)^n\left[x^n-x^{n-1}\frac{a^{2n}-1}{a^2-1}\right]$.

402. $a_1a_2\dots a_n\left(a_0-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}-\dots-\frac{1}{a_n}\right)$.

403. $abc_1c_2\dots c_n\left(\frac{c_0}{ab}-\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_2}-\dots-\frac{1}{c_n}\right)$.

404. $a(a+b)(a+2b)\dots[a+(n-1)b]\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\dots+\frac{1}{a+(n-1)b}\right)$. **Indicación.** De cada fila, comenzando por la segunda, restar la siguiente, de la primera fila restar la última y obtener un determinante del mismo tipo que en el problema anterior.

405. $\left[1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{x_i^2-2a_ix_i}\right]\prod_{i=1}^{n}(x_i^2-2a_ix_i)$. **Indicación.** Utilizar el resultado del problema 306.

406. $\left[1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{x_i^2-2a_ix_i}\right]\prod_{i=1}^{n}(x_i^2-2a_ix_i)$.

407. $1-b_1+b_1b_2-b_1b_2b_3+\dots+(-1)^n b_1b_2\dots b_n$. **Indicación.** Obtener la relación $D_n=1-b_1D_{n-1}$.

408. $(-1)^{n-1}(b_1a_2a_3\dots a_n+b_1b_2a_3\dots a_n+b_1b_2\dots b_{n-1}a_n)$.

409. $(-1)^{n-1}x^{n-2}$. **Indicación.** De cada fila restar la siguiente.

410. $(-1)^n[(x-1)^n-x^n]$. **Indicación.** De cada fila restar la anterior, en el ángulo inferior derecho poner $1=x+(1-x)$ y representar en forma de una suma de dos determinantes.

411. $a_0x^n\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$. **Indicación.** Multiplicar la segunda fila por x^{n-1}, la tercera por x^{n-2}, etc., la n-ésima, por x. Sacar de la primera columna x^n, de la segunda x^{n-1}, de la tercera x^{n-2}, etc., de la n-ésima x.

412. $n!\left(1+x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\dots+\frac{x}{n}\right)$. 413. $2^{\frac{n(n+1)}{2}}\left[1+x\left(2-\frac{1}{2^n}\right)\right]$.

414. $\frac{1}{n!}\left[1+\frac{n(n+1)}{2}x\right]$. 415. $a^{\frac{n(n+1)}{2}}\left[1+x\frac{a^{n+1}-1}{a^n(a-1)}\right]$.

416. $\dfrac{\prod\limits_{1\leqslant i<k\leqslant n}[(a_i-a_k)(b_i-b_k)]}{\prod\limits_{i,\,k=1}^{n}(a_i+b_k)}$, donde el producto en el denominador se toma por todos los i, k que recorren independientemente el uno del otro todos los valores desde 1 hasta n. **Indicación.** De cada fila sacar del signo del determinante el común denominador de los elementos de dicha fila. Mostrar que el determinante obtenido D' se divide por todas las restas tipo $a_i - a_k$ y $b_i - b_k$ $(i \neq k)$. Mostrar que el cociente que se recibe de la división de D' por $\prod\limits_{1\leqslant i<k\leqslant n}[(a_i-a_k)(b_i-b_k)]$ es una constante y para determinarla hay que poner en D'

$$a_1 = -b_1,\ a_2 = -b_2,\ \ldots,\ a_n = -b_n.$$

Puede resolverse de otro modo, a saber: de cada fila restar la primera, luego de cada columna restar la primera.

417. $\dfrac{\prod\limits_{1\leqslant i<k\leqslant n}[(x_i-x_k)(a_k-a_i)]}{\prod\limits_{i,\,k=1}^{n}(x_i-a_k)}$. **Indicación.** Hacer uso de la indicación para el problema anterior.

418. $\dfrac{[1!\,2!\,3!\,\ldots\,(n-1)!]^3}{n!\,(n+1)!\,(n+2)!\,\ldots\,(2n-1)!}$. **Indicación.** Hacer uso de los resultados del problema 416.

419. $a_0a_1a_2\ldots a_n\left(\dfrac{1}{a_0}+\dfrac{1}{a_1}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right)$. **Indicación.** Obtener la relación recurrente $D_n = (a_{n-1}+a_n)\,D_{n-1} - a_{n-1}^2D_{n-2}$ y aplicar el método de la inducción matemática.

420. El continuante $(a_1a_2\ldots a_n)$ es igual a la suma de los posibles productos de los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, uno de los cuales contiene todos esos elementos y los otros se obtienen de ésto, sacándole un par de factores o varios pares con números vecinos. En este caso el término que se obtiene al sacar todos los factores (siendo n par), se considera igual a 1;

$$(a_1a_2a_3a_4) = a_1a_2a_3a_4 + a_3a_4 + a_1a_4 + a_1a_2 + 1,$$
$$(a_1a_2a_3a_4a_5) = a_1a_2a_3a_4a_5 + a_3a_4a_5 + a_1a_4a_5 + a_1a_2a_5 + a_1a_2a_3 + a_1 + a_3 + a_5,$$
$$(a_1a_2a_3a_4a_5a_6) = a_1a_2a_3a_4a_5a_6 + a_3a_4a_5a_6 + a_1a_4a_5a_6 + a_1a_2a_5a_6 + a_1a_2a_3a_6 + a_1a_2a_3a_4 + a_5a_6 + a_3a_6 + a_1a_6 + a_3a_4 + a_1a_4 + a_1a_2 + 1.$$

Indicación. Comprobar la validez de la ley señalada para los continuantes de primero y segundo órdenes y, suponiendo que es justo para los continuantes de los órdenes $(n-1)$-ésimo y $(n-2)$-ésimo, demostrar su validez para los continuantes del n-ésimo orden. Para ello deducir la relación recurrente

$$(a_1a_2\ldots a_n) = a_n\,(a_1a_2\ldots a_{n-1}) + (a_1a_2\ldots a_{n-2}).$$

421. $(C_n^k)^2$.

424. **Indicación.** Mostrar que la cantidad de inversiones en ambas filas de la sustitución dada es igual a $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_k + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_k - 2\,(1+2+\ldots+k)$.

425. 10. 426. 100. 427. 60. 428. 10. 429. — 430. —2. 431. 195. 432. 90. 433. 8. 434. 4. 435. 1000. 436. 12.

437. $(x_2 - x_1)\operatorname{sen}(\gamma - \beta) + (y_2 - y_1)\operatorname{sen}(\alpha - \gamma) + (z_2 - z_1)\operatorname{sen}(\beta - \alpha)$.

438. $A^2x_1 + B^2x_2 + C^2x_3 + 2BCy_1 + 2CAy_2 + 2ABy_3$, donde $A = bc' - b'c$, $B = ca' - c'a$, $C = ab' - a'b$.

439. $-(ayz + bxz + cxy)$. 440. $-(aa' + bb' + cc')$.

441. $abc - x(bc + ca + ab)$.

442. $(x_4 - x_3)[(x_3 - x_2)(x_4 - x_2) - 2(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)]$.

443. $\prod\limits_{h=1}^{n} (a_{hh}a_{2n-h+1,\,2n-h+1} - a_{h,\,2n-h+1}a_{2n-h+1,\,h})$.

444. $(-1)^n \prod\limits_{n \geqslant i > k \geqslant 1} (x_i - x_k)^2$.

445. -84. **Indicación.** De la segunda fila restar la primera duplicada, a la tercera fila añadirle la cuarta duplicada.

446. -84. 447. 98. 448. 43. 449. 81. 450. 14. 451. $(-1)^n(nx + 1)x^n$.

452. $b_{1n}b_{2,n-1}\ldots b_{n1}(a_{1n} - c_{1n})(a_{2,n-1} - c_{2,n-1})\ldots(a_{n1} - c_{n1})$.

453. $x^{2n} - x^{2n-2}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2$.

454. a) $D = M_1M_4$; b) $D = (-1)^k M_2M_3$.

455. $D = (-1)^{k + \frac{k(k+1)l}{2}} M_1M_2\ldots M_l$. La regla de los signos puede enunciarse de otro modo: para l par se toma el signo $(-1)^k$, y para l impar, el signo $(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}$.

459. $(2^{k+1} - 1)(3^{l+2} - 2^{l+1}) - 4(2^k - 1)(3^l - 2^l)$. **Indicación.** Desarrollar según las primeras k filas y aplicar el método de relaciones recurrentes.

460. $(a_1a_2\ldots a_n) = (a_1a_2\ldots a_k)(a_{k+1}a_{k+2}\ldots a_n) + (a_1a_2\ldots a_{k-1})(a_{k+2}a_{k+3}\ldots a_n)$. Suponiendo en este caso que $n = 2k$, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$ y designando por u_n el n-ésimo número de la serie de Fibonacci, obtenemos $u_{2k} = u_k^2 + u_{k-1}^2$, es decir, la suma de los cuadrados de dos números vecinos de la serie de Fibonacci también es un número de esa serie.

462. **Indicación.** Examinar el determinante de orden $2n$ de una matriz que se obtiene de la dada, anotándole por debajo las mismas n filas en el mismo orden.

463. **Indicación.** Después de desarrollar D según la primera, tercera y quinta filas, mostrar que $D = A\,\Delta^2$, donde A no depende de los elementos de Δ. Para determinar A hay que considerar los elementos en la diagonal principal Δ iguales a la unidad, y fuera de la diagonal principal Δ iguales a cero.

464. **Indicación.** Desarrollar el determinante en el primer miembro de la igualdad en una suma de determinantes con respecto a cada fila y representarlo como

$$\sum_{i,\,j,\,k=0}^{4} a_ib_jc_kD_{ijk}, \text{ donde } D_{ijk} = \begin{vmatrix} \alpha^i & \beta^i & \gamma^i \\ \alpha^j & \beta^j & \gamma^j \\ \alpha^k & \beta^k & \gamma^k \end{vmatrix}$$

Mostrar que la última suma puede tomarse sólo por todos los tríos de índices ijk que no contienen números iguales, desarrollando el determinante de 5-o orden en el segundo miembro de la igualdad según las primeras tres filas, representar el segundo miembro como $\sum a_ib_jc_kC_{ijk}$, donde la suma se toma según todos los tríos de números diferentes de ijk que varían desde 0 hasta 4. Por fin, mostrar que tiene lugar la igualdad $D_{ijk} = C_{ijk}$; para eso cualquiera de los tríos de ijk reducirlo al caso $i < j < k$, permutando las filas y columnas de los determinantes y examinar todos los diez casos posibles. Por ejemplo:

$$\Delta_{013} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix} = (\alpha + \beta + \gamma)(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta).$$

Pero también $C_{013} = -\begin{vmatrix} p & 0 \\ q & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} = (\alpha + \beta + \gamma)(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)$,

puesto que $p = -(\alpha + \beta + \gamma)$.

466. Solución. La demostración se lleva por el mismo plan que en el teorema de Laplace. Mostremos que cualquier término del producto $\varepsilon M_1 M_2 \ldots$ $\ldots M_p$ es un término de determinante D. Supongamos que primero M_1 yace en las primeras k filas y las primeras k columnas, M_2 en las siguientes l filas y las siguientes l columnas, etc., M_p se halla en las últimas s filas y últimas s columnas. En este caso la sustitución (1) es idéntica y $\varepsilon = +1$.

Tomamos el producto de cualesquiera términos de los menores $M_1, M_2, \ldots$ $\ldots, M_p$ en orden creciente de los primeros índices de los elementos. Dicho producto contiene un elemento de cada fila y de cada columna, siendo, por lo tanto, término de D según la composición de elementos. Si en los segundos índices de los elementos del término del menor M_i hay σ_i inversiones, el signo de este producto será $(-1)^{\sigma_1 + \ldots + \sigma_p}$. Pero los índices de los elementos de dos menores diferentes M_i y M_j no forman inversiones. Esto significa que $\sigma_1 + \ldots + \sigma_p$ es la cantidad total de inversiones en los segundos índices de los elementos del producto en cuestión, asimismo será también término de D según el signo. Supongamos ahora que los menores M_i se sitúan de modo arbitrario. Los pasamos a la posición, estudiada antes, en la diagonal principal mediante semejantes sustituciones de filas y columnas de D. Al principio trasladamos la primera fila del menor M_1 con el número α_1 al primer lugar, permutando con todas las filas de D que se encuentran más arriba. Realizamos $\alpha_1 - 1$ transposiciones de las filas, es decir, tantas, cuantas inversiones forma el número α_1 en la fila superior de la sustitución (1) con los números que le siguen. Luego, mediante el mismo procedimiento, transmitimos la fila con el número α_2 al segundo lugar, efectuando tantas transposiciones de filas, cuantas inversiones forma α_2 en la fila superior de la sustitución (1) con los números que le siguen, etc. Permutamos de la misma manera las columnas de D. Si en la primera fila de la sustitución (1) hay σ inversiones y en la segunda τ, $\varepsilon = (-1)^{\sigma+\tau}$ y en total realizaremos $\sigma + \tau$ transposiciones de filas y columnas de D. Por eso obtendremos un nuevo determinante D', para el cual

$$D = \varepsilon D'. \tag{2}$$

Según lo demostrado anteriormente, cualquier término del producto $M_1 M_2 \ldots M_p$ será término del determinante D', en virtud de (2) cualquier término del producto $\varepsilon M_1 M_2 \ldots M_p$ será término del determinante D.

Todos los términos de un mismo producto o de dos diferentes $\varepsilon M_1 M_2 \ldots$ $\ldots M_p$ se diferencian uno del otro por la composición de los elementos y por ello serán distintos términos del determinante D. Nos queda por demostrar que la cantidad total de los términos de todos los productos semejantes es igual a $n!$ El número de los menores M_1 es igual a C_n^k. Si M_1 ya está elegido, los menores M_2 pueden yacer sólo en las $n - k$ filas restantes y su cantidad (para cada elección de M_1) es igual a C_{n-k}^l. Para los M_1 y M_2 elegidos, la cantidad de los menores M_3 es igual a C_{n-k-l}^m, etc.; por fin, para $M_1, M_2 \ldots M_{p-1}$ la cantidad de menores M_p es igual a $C_s^s = 1$. Por eso la cantidad de todos los productos tipo

$$\varepsilon M_1 M_2 \ldots M_p \text{ será } C_n^k \cdot C_{n-k}^l \cdot C_{n-k-l}^m \ldots C_s^s = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{l!\,(n-k-l)!} \times$$

$$\times \frac{(n-k-l)!}{m!\,(n-k-l-m)!} \cdots \frac{s!}{s!} = \frac{n!}{k!\,l!\,m! \ldots s!}.$$

Pero la cantidad de términos del determinante D en cada producto $\varepsilon M_1 M_2 \ldots$ $\ldots M_p$ es igual a $k!\,l!\,m! \ldots s!$ Esto significa que la cantidad de términos en todos los productos $\varepsilon M_1 M_2 \ldots M_p$ es igual a $\frac{n!}{k!\,l!\,m! \ldots s!} k!\,l!\,m! \ldots s! = n!$

467. Obtendremos al multiplicar

$$\text{filas por filas: } \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -4 & -7 & -13 \\ -3 & -4 & -13 \end{vmatrix},$$

$$\text{filas por columnas:} \begin{vmatrix} 7 & -26 & 13 \\ 12 & -35 & 19 \\ 17 & -52 & 27 \end{vmatrix},$$

$$\text{columnas por filas:} \begin{vmatrix} -3 & 1 & -6 \\ -3 & 1 & -8 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\text{columnas por columnas:} \begin{vmatrix} 9 & -35 & 18 \\ 13 & -47 & 24 \\ 12 & -37 & 17 \end{vmatrix}.$$

Los valores de los determinantes dados son -5 y 10, y los valores de todos los determinantes obtenidos son -50.

468. $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

469. $(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2)^4$.

470. 0 para $n>2$; $(x_2-x_1)(y_2-y_1)$ para $n=2$. **Indicación.** Representar en forma de producto de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & y_2 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & y_n & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

471. 0, si $n>2$, sen $(\alpha_1-\alpha_2)$ sen $(\beta_1-\beta_2)$ si $n=2$.

472. 0, si $n>2$, sen^2 $(\alpha_1-\alpha_2)$ si $n=2$.

473. 0, si $n>2$, $-$sen^2 $(\alpha_1-\alpha_2)$ si $n=2$.

474. $\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(a_i-a_k)(b_i-b_k)$.

475. $C_n^1C_n^2\dots C_n^n\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 0}(a_k-a_i)(b_i-b_k)$.

476. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[(n-1)!]^n$. **Indicación.** El elemento en la i-ésima fila y k-ésima columna escribirlo como $[i+(k-1)]^{n-1}$ y desarrollarlo según la fórmula del grado de binomio o aplicar directamente el resultado del problema anterior.

477. $\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)^2$.

478. $\prod\limits_{i=1}(x-x_i(\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)^2$.

Indicación. Representar en forma de producto de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & x \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 & x^2 \\ . & . & . & . & . \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} & x^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n & x^n \end{vmatrix} y \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

con la particularidad de que el producto se compone por las filas.

479. **Indicación.** Multiplicar el determinante dado por el de Vandermonde

$$v=\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 & \dots & \varepsilon_1^{n-1} \\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \dots & \varepsilon_2^{n-1} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & \varepsilon_n & \varepsilon_n^2 & \dots & \varepsilon_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

481. $(1-\alpha^n)^{n-1}$. **Indicación.** Utilizar el resultado del problema 479 y la igualdad $(1-\alpha\varepsilon_1)(1-\alpha\varepsilon_2)\ldots(1-\alpha\varepsilon_n)=1-\alpha^n$, donde $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ son raíces de n-ésima potencia de la unidad. En cambio, es más fácil calcular este determinante como un caso particular del determinante del problema 325.

483. $(a+b+c+d)(a-b+c-d)(a+bi-c-di)(a-bi-c+di)=a^4-b^4+c^4-d^4-2a^2c^2+2b^2d^2-4a^2bd+4b^2ac-4c^2bd+4d^2ac$.

484. $[1+(-1)^n]^n=\begin{cases}0 \text{ para } n \text{ impar},\\ 2^n \text{ para } n \text{ par}.\end{cases}$

485. $(-1)^n \dfrac{[(n+1)a^n-1]^n-n^n a^{n(n+1)}}{(1-a^n)^2}$.

486. **Indicación.** Calcular el primer determinante, haciendo uso del resultado del problema 479.

487. $(-2)^{n-1}(n-2p)$, si n y p son primos entre sí; 0 si n y p no son primos entre sí. **Indicación.** Utilizar el resultado del problema 479 y las propiedades de las raíces de la n-ésima potencia de la unidad, y en particular que para p primo con n, los números $\varepsilon_1^p, \varepsilon_2^p, \ldots, \varepsilon_n^p$ son de nuevo todos los valores de $\sqrt[n]{1}$, mientras que cuando p no es primo con n, habrá un $\varepsilon_k \neq 1$, para el cual $\varepsilon_k^p=1$.

488. $[3+(n-p)b](a-b)^{n-1}$ si n y p son primos entre sí; 0 si p y n no son primos entre sí. **Indicación.** Hacer uso de la indicación del problema anterior.

489. $2^{n-2}\left(\cos^n \dfrac{\pi}{n}-1\right)$. **Indicación.** Considerar $\cos \dfrac{j\pi}{n}=\dfrac{\varepsilon_1^j+\varepsilon_1^{-j}}{2}$, donde $\varepsilon_1=\cos\dfrac{\pi}{n}+i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{n}$, utilizar el resultado del problema 479 y el hecho de que para cualquier a tenemos $\prod\limits_{h=0}^{n-1}(a-\varepsilon_1^{2h})=a^n-1$ y $\varepsilon_1^n=-1$.

490. $\dfrac{[\cos\theta-\cos(n+1)\theta]^n-(1-\cos n\theta)^n}{2(1-\cos\theta)}=2^{n-2}\,\mathrm{sen}^{n-2}\dfrac{n\theta}{2}\times\left[\mathrm{sen}^n\dfrac{(n+2)\theta}{2}-\mathrm{sen}^n\dfrac{n\theta}{2}\right]$. **Indicación.** Considerar $\varepsilon=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{2\pi}{n}$, $\eta=\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta$ y hacer uso del resultado del problema 479.

491. $(-1)^n 2^{n-2}\,\mathrm{sen}^{n-2}\dfrac{nh}{2}\left[\cos^n\left(a+\dfrac{nh}{2}\right)-\cos^n\left(a+\dfrac{(n-2)h}{2}\right)\right]$.

492. $(-1)^{n-1}\dfrac{(n+1)(2n+1)n^{n-2}}{12}[(n+2)^n-n^n]$. **Indicación.** Utilizar el resultado del problema 479 y las relaciones $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ y $1+4\varepsilon+9\varepsilon^2+\ldots+n^2\varepsilon^{n-1}=-\dfrac{n^2(1-\varepsilon)+2n}{(1-\varepsilon)^2}$, donde ε es la raíz de la n-ésima potencia de 1, diferente de la unidad. Para obtener la última igualdad, multiplicar y dividir el primer miembro por $1-\varepsilon$.

493. $f(\eta_1)f(\eta_2)\ldots f(\eta_n)$, donde $f(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\ldots+a_nx^{n-1}$ y $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ son todos los valores de la raíz $\sqrt[n]{-1}$, por ejemplo, $\eta_k=\cos\dfrac{(2k-1)\pi}{n}+i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{(2k-1)\pi}{n}$. **Indicación.** Multiplicar el determinante dado por el de Vandermonde compuesto por los números $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$.

494. $f(\alpha_1) f(\alpha_2) \ldots f(\alpha_n)$, donde $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots \ldots + a_nx^{n-1}$ y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son todos los valores de la raíz de la n-ésima potencia de z.

495. **Indicación.** Designando las raíces de la potencia $2n$ de 1 por $\varepsilon_k = \cos \frac{k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{k\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$, mostrar que los números ε_k, teniendo los índices k pares, nos dan todas las raíces de la n-ésima potencia de la unidad, con la particularidad de que $a_1 + a_2\varepsilon_k + a_3\varepsilon_k^2 + \ldots + a_{2n}\varepsilon_k^{2n-1} = (a_1 + a_{n+1}) + (a_2 + a_{n+2})\varepsilon_k + (a_3 + a_{n+3})\varepsilon_k^2 + \ldots + (a_n + a_{2n})\varepsilon_k^{n-1}$, y los números ε_k con índices k impares nos dan todas las raíces de la n-ésima potencia de -1, con la particularidad de que $a_1 + a_2\varepsilon_k + a_3\varepsilon_k^2 + \ldots \ldots + a_{2n}\varepsilon_k^{2n-1} = (a_1 - a_{n+1}) + (a_2 - a_{n+2})\varepsilon_k + (a_3 - a_{n+3})\varepsilon_k^2 + \ldots \ldots + (a_n - a_{2n})\varepsilon_k^{n-1}$.

496. El producto de dos números, cada uno de los cuales es la suma de los cuadrados de cuatro números enteros, será por sí mismo una suma de cuadrados de cuatro números enteros. **Indicación.** Cada uno de los determinantes elevarlo al cuadrado.

497. El producto de dos números, cada uno de los cuales es igual al valor de la forma $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, para los valores enteros de x, y, z, será por sí mismo un número del mismo género. **Indicación.** Calcular el producto de los determinantes

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ c' & a' & b' \\ b' & c' & a' \end{vmatrix},$$

multiplicando las filas del primer determinante por las columnas del segundo.

498. **Indicación.** En el producto de los determinantes

$$\begin{vmatrix} a & 1 & b \\ b & 1 & a \\ c & 1 & b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a' & b' & 1 \\ c' & a' & 1 \\ b' & c' & 1 \end{vmatrix},$$

compuesto por la multiplicación de las columnas por las columnas, la tercera columna multiplicarla por $s' = a' + b' + c'$ y el factor s' sacarlo de la segunda fila fuera del signo del determinante. Luego de la tercera columna restar la primera y segunda.

499. **Indicación.** Después de escribir el determinante D como

$$D = \begin{vmatrix} \sum a_{1,k_1}b_{1,k_1} & \sum a_{1,k_2}b_{2,k_2} & \ldots & \sum a_{1,k_m}b_{m,k_m} \\ \sum a_{2,k_1}b_{1,k_1} & \sum a_{2,k_2}b_{2,k_2} & \ldots & \sum a_{2,k_m}b_{m,k_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum a_{m,k_1}b_{1,k_1} & \sum a_{m,k_2}b_{2,k_2} & \ldots & \sum a_{m,k_m}b_{m,k_m} \end{vmatrix},$$

donde todas las sumas de la j-ésima columna se toman según el mismo índice $k_j = 1, 2, \ldots, n$, desarrollar D en una suma de n^m determinantes con respecto a las columnas, en cada sumando de la j-ésima columna sacar b_{j,k_j} fuera del signo del determinante y mostrar que

$$D = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_m = 1}^{n} b_{1,k_1}b_{2,k_2} \ldots b_{m,k_m}A_{k_1,k_2,\ldots,k_m}, \quad (3)$$

donde los índices de la adición varían desde la unidad hasta n, independientemente el uno del otro. Observar que $A_{k_1,k_2,\ldots,k_m} = 0$ si entre los índices $k_1, k_2, \ldots, k_m$ hay iguales. Deducir de aquí la afirmación (2), y para $m \leqslant n$ demostrar que para cualesquiera índices $i_1, i_2, \ldots, i_m$, donde $1 \leqslant i_1 <$

$< i_2 < \ldots < i_m \leqslant n$, todos los sumandos de la suma (3), en los cuales los índices $k_1, k_2, \ldots, k_m$ forman cualesquiera permutaciones de números $i_1, i_2, \ldots, i_m$, tienen la suma igual a $A_{i_1, i_2, \ldots, i_m} \cdot B_{i_1, i_2, \ldots, i_m}$ y de aquí obtener la afirmación (1).

500. Indicación. Completar las matrices A y B hasta hacerlas cuadradas mediante $m - n$ columnas que constan solamente de ceros.

501. Indicación. Aplicar el teorema del problema 499 a las matrices

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ d_1 & d_2 & \ldots & d_n \end{pmatrix}.$$

503. Indicación. Hacer uso de la identidad del problema anterior.

504. Indicación. Aplicar el teorema del problema 499 a las matrices:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \ldots & \bar{a}_n \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \ldots & \bar{b}_n \end{pmatrix}.$$

505. Indicación. Hacer uso de la identidad del problema anterior.

506. Indicación. Multiplicando D y D' por las filas, mostrar que $DD' = D^n$, de donde para $D \neq 0$ se desprende (1). Para $D = 0$ examinar el caso cuando todos los elementos de D son nulos. Si $D = 0$, pero por lo menos uno de los elementos $a_{ij} \neq 0$, entonces, a la i-ésima fila de D', multiplicada por a_{ij}, añadir la primera fila, multiplicada por a_{1j}, la segunda, multiplicada por $a_{2j}, \ldots$, la n-ésima, multiplicada por a_{nj}, y mostrar que $a_{ij}D' = 0$.

Puede prescindirse del caso $D = 0$ si se considera que el elemento de D no es número sino una variable independiente. Entonces el determinante será un polinomio, distinto de cero, y demostraremos que (1) es una identidad, lo que significa que es válida para cualesquiera valores numéricos de las variables a_{ij} independientemente de si D se convierte en cero.

507. Indicación. Primero se examina el caso cuando M yace en el ángulo superior izquierdo. Multiplicando según las filas el determinante D por el menor M', escrito de la siguiente manera

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1m} & A_{1,m+1} & \ldots & A_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m1} & \ldots & A_{mm} & A_{m,m+1} & \ldots & A_{mn} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix},$$

mostrar que $DM' = D^m A$ y $M' = D^{m-1}A$ (el caso $D = 0$ puede omitirse de la misma forma que se señaló en el problema anterior, o sea, considerando D como polinomio con respecto a n^2 indeterminadas a_{ij}). Después la posición general de M reducirla a las permutaciones en cuestión de las filas y columnas, para ello mostrar que al permutar dos filas vecinas (o columnas), en el determinante recíproco D' surge la misma permutación de filas (o columnas) y, además, todos los elementos de D' varían de signo.

508. Indicación. Utilizar el problema anterior.

509. Indicación. Utilizar el problema anterior.

510. Indicación. Aplicar la igualdad del problema 507 para $m = n - 1$.

511. Indicación. Utilizar la igualdad del problema 507 sustituyendo m por $n - m$.

512. Indicación. Por el valor del determinante recíproco D' hallar el valor del determinante D y usar la igualdad del problema 510. Mostrar que el problema tiene $n - 1$ soluciones.

513. Indicación. Representar el primer determinante como el cuadrado del determinante de Vandermonde, compuesto por los números $0, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

514. $A_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$.

515. **Indicación.** Examinar los productos $D\Delta$ y ΔD, donde D es el determinante dado y Δ, un determinante del mismo orden que D, obtenido al permutar las i-ésima y j-ésima filas del determinante que tiene en la diagonal principal unidades y fuera de ella, ceros.

516. **Indicación.** Examinar el producto $D\Delta$ y ΔD, donde D es el determinante dado y en Δ los elementos de la diagonal principal son iguales a la unidad, el elemento de la i-ésima fila y j-ésima columna es igual a c, mientras que todos los demás elementos son nulos.

517. **Indicación.** Poner $\varphi_1 = \alpha_2 - \alpha_3$, $\varphi_2 = \alpha_3 - \alpha_1$, $\varphi_3 = \alpha_1 - \alpha_2$.

518. **Indicación.** Aplicar la identidad del problema 502.

520. El determinante es igual al área duplicada del triángulo $M_1M_2M_3$ si la dirección del giro mínimo de la semirrecta M_3M_1 hasta coincidir con M_3M_2 concuerda con la dirección del giro mínimo desde el sentido positivo de Ox hasta el sentido positivo de Oy. En caso contrario el determinante es igual al área duplicada del triángulo $M_1M_2M_3$ con signo menos.

Solución. Las transformaciones señaladas de las coordenadas se expresan mediante las fórmulas:

$$x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha + x_0,$$
$$y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha + y_0.$$

De aquí, multiplicando por las filas, hallamos

$$\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & x_0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Pero el segundo determinante del primer miembro de la igualdad es igual a 1. Así queda demostrada la invariabilidad del determinante dado en el problema, para las transformaciones indicadas. Traslademos el origen de coordenadas al punto M_3 y demos la vuela a los ejes de modo que el nuevo eje de las abscisas pase por M_3M_1. Las nuevas coordenadas de los puntos M_1, M_2, M_3 serán $x_1' = M_3M_1$, $y_2' = \pm h$, donde h es la altura del triángulo $M_1M_2M_3$ bajada del vértice M_1, con la particularidad de que la elección del signo más o menos está relacionada con la orientación del triángulo de acuerdo con la regla indicada más arriba, $y_1' = x_3' = y_3' = 0$. Por eso el determinante adquiere la forma

$$\begin{vmatrix} x_1' & 0 & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \pm M_3M_1 \cdot h = \pm 2S,$$ donde S es el área del triángulo $M_1M_2M_3$.

521. El determinante es igual al área del paralelogramo construido sobre los segmentos que unen el origen de coordenadas con los puntos M_1 y M_2, tomada con el signo más si la dirección del giro más corto desde OM_1 hacia OM_2 y desde Ox hacia Oy coinciden, y con el signo menos si ambas direcciones son opuestas. El determinante no varía al girar los ejes, pero puede cambiar al trasladar el origen de coordenadas. **Indicación.** Aplicar el resultado del problema anterior, tomando como tercer punto el origen de coordenadas.

522. $R = \frac{abc}{4s}$. **Indicación.** El centro del círculo circunscrito se toma como origen de coordenadas, utilizar las relaciones

$$R^2 - x_ix_j - y_iy_j = \frac{1}{2}[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

así como también el resultado del problema 520.

523. Indicación. Mostrar que el cuadrado del determinante es igual a 1. Para determinar el signo, usando la continuidad del determinante por el conjunto de todas las variables α_i, β_i, γ_i ($i = 1, 2, 3$), mostrar que al girar la figura $OABC$, aquél no varía.

524. El determinante es igual al volumen del paralelepípedo construido sobre los segmentos que unen el origen de coordenadas O con los puntos M_1, M_2, M_3, o a seis volúmenes del tetraedro $OM_1M_2M_3$ tomado con el signo más si las orientaciones de los triedros $OM_1M_2M_3$ y $Oxyz$ son iguales, y con el signo menos si estas orientaciones son opuestas (las orientaciones se consideran iguales si después de hacer coincidir mediante el giro del triedro $Oxyz$ los ejes Ox y OM_1 y los planos xOy y OM_1M_2, de modo que Oy y OM_2 se encuentren de un lado de Ox, los rayos Oz y OM_3 resultarán de un lado del plano xOy, y opuestas si resultan de diferentes lados). **Indicación.** Si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ son, respectivamente, los cosenos de los nuevos ejes Ox', Oy', Oz' con los iniciales, las coordenadas nuevas e iniciales están ligadas mediante las relaciones

$$x = \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z', \quad y = \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z', \quad z = \alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z'.$$

Haciendo uso de este resultado y de los del problema anterior, demostrar la constancia del determinante del problema en cuestión. Con el fin de aclarar el sentido geométrico del determinante es necesario girar el sistema de coordenadas $Oxyz$ de la forma indicada anteriormente al determinar las orientaciones igual y opuesta de los triedros.

525. $V = abc\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$.

Indicación. Calcular V^2, haciendo uso del resultado del problema anterior.

526. Indicación. En las semirrectas OA, OB, OC tomar los puntos M_1, M_2, M_3 a una distancia igual a 1 del origen de coordenadas y aplicar el resultado del problema 524.

527. El determinante es igual a los seis volúmenes del tetraedro con vértices M_1, M_2, M_3, M_4 tomado con el signo más si el triedro formado por las semirrectas de M_4 a cada uno de los puntos M_1, M_2, M_3 tiene la misma orientación que el triedro $Oxyz$, y con el signo menos, en caso contrario. **Indicación.** Trasladar el origen de coordenadas al punto M_4 y aplicar el resultado del problema 524. Puede resolverse de otro modo: semejante a la resolución del problema 520 usando el problema 523. Entonces el problema 524 se obtiene como un caso particular del dado (semejantemente a cómo fue hecho en el plano del problema 521).

528.

$$R = \frac{1}{24V}\sqrt{2l_{13}^2l_{14}^2l_{23}^2l_{24}^2 + 2l_{12}^2l_{14}^2l_{32}^2l_{34}^2 + 2l_{12}^2l_{13}^2l_{42}^2l_{43}^2 - l_{12}^4l_{34}^4 - l_{13}^4l_{24}^4 - l_{14}^4l_{23}^4},$$

donde V es el volumen del tetraedro y $l_{ij} = l_{ji}$ ($i, j = 1, 2, 3, 4, i \neq j$) es la longitud de la arista que une los vértices (x_i, y_i, z_i) y (x_j, y_j, z_i). Si el tetraedro es regular con longitud de la arista a tenemos $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. **Indicación.** Aplicar el resultado del problema anterior y la relación

$$R^2 - x_ix_j - y_iy_j - z_iz_j = \frac{1}{2}[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2],$$

que es válida en suposición de que el origen de coordenadas se traslada al centro de una esfera circunscrita.

529. Indicación. Al demostrar la afirmación 2) mostrar que el vector $\boldsymbol{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ puede representarse como $\boldsymbol{a}_{ii} = a_{i1}\boldsymbol{e}_1 + a_{i2}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{in}\boldsymbol{e}_n$. Luego mostrar que permutando dos vectores, la función $f(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ varía de signo. Para demostrar eso, por ejemplo para los vectores $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, examinar $f(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$.

530. Indicación. Demostrar que la función $f(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = |AB|$ con respecto a las filas de la matriz A posee las propiedades (α) y (β) y que $f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = |B|$.

531. Pongamos $f(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}) = 1$ para cualesquiera $i_1, i_2, \ldots, i_n = 1, 2, \ldots, n$ (iguales o diferentes). En virtud de (α), suponiendo que $a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j$, obtenemos

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n=1}^{n} a_{1, i_1} a_{2, i_2} \ldots a_{n, i_n}.$$

Eso define la función $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Es obvio que no varía al permutar los vectores, es decir, en caso de un campo de característica dos, varía de signo. Por lo tanto, (β') se cumple, mientras que (β), por lo visto, no se cumple.

532. $(-1)^{C_n^2} i^{C_{n-1}^2} n^{\frac{n}{2}} = i^{\frac{(n-1)(3n-2)}{2}} n^{\frac{n}{2}}$,

Solución. Multiplicando dicho determinante D por sí mismo y observando que $\varepsilon^k = 1$ cuando, y sólo cuando, k se divide por n, obtenemos

$$D^2 = \begin{vmatrix} n & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & n \\ 0 & 0 & \ldots & n & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & n & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{C_{n-1}^2} n^n,$$

de donde $D = \pm i^{C_{n-1}^2} n^{\frac{n}{2}}$ y para el módulo D hallamos: $|D| = n^{\frac{n}{2}}$. Nos queda por determinar el argumento. Calculando D como el determinante de Vandermonde de los números $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}$ y suponiendo luego que $\varepsilon = \alpha^2$, donde $\alpha = \cos\frac{\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}$, obtenemos

$$D = \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} (\varepsilon^k - \varepsilon^j) = \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} (\alpha^{2k} - \alpha^{2j}) =$$

$$= \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} \alpha^{k+j} (\alpha^{k-j} - \alpha^{-(k-j)}) =$$

$$= \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} \alpha^{j+k} \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} 2i \operatorname{sen}\frac{(k-j)\pi}{n}.$$

Para los valores en cuestión de j y k siempre $0 < k - j < n$, y por lo tanto, $\operatorname{sen}\frac{(k-j)\pi}{n} > 0$. Por eso $|D| = \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} 2 \operatorname{sen}\frac{(k-j)\pi}{n} = n^{\frac{n}{2}}$.

$D = |D|\, \beta$, donde $\beta = i^{C_n^2} \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} \alpha^{j+k}$. En el exponente de la potencia de α cada número entero p $(0 \leqslant p \leqslant n-1)$ entrará $n-1$ veces precisamente: bien como j para $k = p+1, p+2, \ldots, n-1$, bien como k para $j = 0, 1, 2, \ldots, p-1$. Notando que $\alpha^{n/2} = i$ (siendo n impar, $\alpha^{n/2} = \pm i$, en cambio la elección del signo no tiene importancia, en vista de que el número $n-1$ es par, lo que queda claro de los cálculos expuestos más abajo), hallámos

$$\beta = i^{\frac{n(n-1)}{2}} \alpha^{\frac{n(n-1)^2}{2}} = i^{\frac{n(n-1)}{2} + (n-1)^2} = i^{\frac{(n-1)(3n-2)}{2}}$$

Suponiendo que $3n = 2n + n$ y usando la expresión dada antes para $|D|$, obtenemos la fórmula exigida para D.

533. El determinante será multiplicado por $(2-k)\,2^{k-1}$. **Indicación.** El caso de cualesquiera filas reducirlo a las primeras. Si se eligen las primeras k fi-

las, la transformación indicada puede obtenerse multiplicando dicho determinante a la izquierda por el determinante del mismo orden, en el cual todos los elementos de la diagonal principal son iguales a 1, los elementos fuera de la diagonal principal que se encuentran en las primeras k filas y las primeras k columnas, son iguales a -1, y los demás elementos son nulos.

534. $D = D_0 + Sx$, donde D_0 es el valor del determinante D para $x = 0$ y S es la suma de los cofactores de todos los elementos de D_0.

535. **Indicación.** Hacer uso del resultado del problema anterior.

536. **Indicación.** Hacer uso del problema anterior.

537. **Indicación.** En el determinante del problema 534 poner $x = -1$.

539. **Indicación.** Aplicar el método de la inducción matemática.

540. **Indicación.** Todas las np filas del determinante D dividirlas en n sistemas de p filas en cada uno, atribuyendo al primer sistema las filas con los números $1,\ n+1,\ 2n+1,\ \ldots,\ (p-1)\,n+1$, al segundo, las filas con los números $2,\ n+2,\ 2n+2,\ \ldots,\ (p-1)\,n+2,\ \ldots$, al n-ésimo, las filas con los números $n,\ 2n,\ 3n,\ \ldots,\ pn$. Aplicar a estos sistemas el teorema generalizado de Laplace del problema 466. Mostrar que los menores de orden p de cualquiera de los sistemas señalados son nulos si por lo menos dos segundos índices de los elementos b_{ij} son iguales y que $D = f\,(a_{11},\ \ldots,\ a_{nn})\,B^n$, donde $f\,(a_{11},\ \ldots,\ a_{nn})$ no depende de los elementos b_{ij}. Para determinar $f\,(a_{11},\ \ldots,\ a_{nn})$ poner $b_{ii} = 1$ para $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ y $b_{ij} = 0$ para $i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ i \neq j$.

542. **Solución.** Si todos los $A_{ij} = 0$, puede ponerse

$$A_i = B_i = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Supongamos, por ejemplo, que los cofactores de los elementos de la última columna no son todos nulos (para cualquier otra columna los razonamientos son análogos). Puesto que $D = 0$, los cofactores de los elementos de dos columnas son proporcionales (véase el problema 509)

$$\frac{A_{1j}}{A_{1n}} = \frac{A_{2j}}{A_{2n}} = \ldots = \frac{A_{nj}}{A_{nn}} = \frac{B_j'}{C_j}\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

donde la fracción $\frac{B_j'}{C_j}$ se considera irreducible. De aquí

$$A_{ij} = \frac{A_{in}B_j'}{C_j}\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \tag{1}$$

Pero A_{ij} es un polinomio con respecto a $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_s$ y la fracción $\frac{B_j'}{C_j}$ es irreducible. Por lo tanto A_{in} tiene que dividirse por $C_j\ (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$, lo que significa que se divide también por el mínimo común múltiplo de todos los $C_j\ (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$. Designando este mínimo común múltiplo por B_n, obtenemos

$$A_{in} = A_iB_n \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{2}$$

donde todos los A_i son polinomios con respecto a $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_s$. Supongamos que $B_j = \frac{B_n}{C_j}\cdot B_j'\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$. Todos los B_j son polinomios con respecto a $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_s$, con la particularidad que de (1) hallamos

$$A_{ij} = A_iB_j\ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \tag{3}$$

Las igualdades (2) y (3) demuestran el teorema. En particular, para el determinante Δ puede ponerse: $A_1 = B_1 = c,\ A_2 = B_2 = -b,\ A_3 = B_3 = a$.

543. **Solución.** Sea D_{2n} un determinante antisimétrico de orden $2n$. Apliquemos la inducción según n. Para $n = 1$ el teorema es válido ya que $D_2 = a_{12}^2$. Supongamos que el teorema es válido para el número n y lo demostraremos para el número $n+1$. Borrando del determinante D_{2n+2} dado la última fila y última columna, obtenemos un determinante antisimétrico D_{2n+1} igual a cero. Sus

elementos pueden considerarse como polinomios con respecto a los elementos que se encuentran por encima de la diagonal principal con coeficientes enteros. Según el teorema del problema anterior, los cofactores de los elementos D_{2n+1} tienen la forma $A_{ij} = A_i B_j$ ($i, j = 1, 2, \ldots, 2n+1$), donde A_i y B_j son polinomios respecto a las mismas indeterminadas. Los menores M_{ij} y M_{ji} en D_{2n+1} se obtienen uno de otro, transponiendo y variando los signos de los elementos, pero como éste es de orden par $2n$, $A_{ij} = A_{ji}$. O bien $A_i B_j = A_j B_i$.

$$\frac{B_i}{A_i} = \frac{B_j}{A_j} = \lambda; \; B_i = \lambda \cdot A_i \; (i = 1, 2, \ldots, 2n+1).$$

λ es una función racional respecto a las mismas indeterminadas. Prosiguiendo, $A_{ii} = A_i B_i = \lambda A_i^2$ y, según la suposición, A_{ii} es un cuadrado perfecto. Esto significa que $\lambda = \mu^2$, donde μ es una función racional. Así, pues, $A_{ii} = (\mu A_i)^2$. Aquí a la izquierda está un polinomio. Pero el cuadrado de una fracción irreducible no puede ser polinomio. Por consiguiente, $\mu A_i = c_i$ es un polinomio. Aplicando la descomposición, dada en el problema 541, hallamos

$$D_{2n+2} = -\sum_{i,j=1}^{2n+1} A_{ij} a_{i,2n+2} a_{2n+2,j} = \sum_{i,j=1}^{2n+1} A_i B_j a_{i,2n+2} a_{j,2n+2} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{2n+1} A_i a_{i,2n+2} \right) \left(\sum_{j=1}^{2n+1} B_j a_{j,2n+2} \right) = \lambda \left(\sum_{i=1}^{2n+1} A_i a_{i,2n+2} \right)^2 =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{2n+1} C_i a_{i,2n+2} \right)^2.$$

Con ello se demuestra la afirmación del problema. Esta demostración no nos da un procedimiento cómodo para calcular de hecho el polinomio, y cuyo cuadrado es igual a dicho determinante antisimétrico de orden par. Estas reglas se ofrecen en los problemas 545 y 546.

544. Indicación. Examinar dos términos, en uno de los cuales la sustitución de los índices tiene un ciclo $(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_h)$ (h es impar y superior a la unidad) y en el otro, el ciclo $(\alpha_h \alpha_{h-1} \ldots \alpha_2 \alpha_1)$. Examinar aparte el caso de $h = 1$.

545. Indicación. Al demostrar 1) según el par N_1, N_2 dado de los productos de Pfaff citados, reconstruir la anotación (1) de la sustitución del término buscado, teniendo en cuenta que si este término se escribe como

$$\pm a_{\alpha_1, \alpha_2} a_{\alpha_2, \alpha_3} \ldots a_{\alpha_h, \alpha_1} a_{\beta_1, \beta_2} \ldots a_{\mu_h, \mu_1},$$

entonces N_1' consta de elementos que ocupan en ese producto los lugares impares y N_2', los lugares pares. Por ejemplo, en N_1 tomamos el elemento con el primer índice $\alpha_1 = 1$. Su segundo índice α_2 nos da el segundo elemento del primer ciclo. En N_2 cogemos un elemento, uno de los índices del cual es α_2. Si el otro índice es $-\alpha_1$, el ciclo resulta cerrado, si es α_3, es el tercer término del ciclo, etc. Mostrar que en la sustitución obtenida todos los ciclos son de longitud par. Al demostrar 2) observar que $N_1 = N_1'$ y $N_2 = N_2'$. El signo del término determinarlo como $(-1)^s$, donde s es la cantidad de ciclos de la sustitución correspondiente. La afirmación 3) se deduce de 1), 2) y del teorema del problema anterior.

546. Indicación. Mostrar que en cada sumando del agregado p_n entra uno, y sólo un elemento de la n-ésima columna de D_n; en cada sumando de p_n poner los elementos en orden creciente de los segundos índices y mostrar que si se saca de los paréntesis el elemento a_{in} de todos los sumandos que lo contienen, en los paréntesis nos queda p_{in} con el signo $(-1)^{n-1-i} = (-1)^{i-1}$.

547. $p_2 = a_{12}$; $p_4 = a_{23}a_{14} - a_{13}a_{24} + a_{12} \cdot a_{34}$; $p_6 = a_{34}a_{25}a_{16} - a_{24}a_{35}a_{16} +$
$+ a_{23}a_{45}a_{16} - a_{34}a_{15}a_{26} + a_{14}a_{35}a_{26} - a_{13}a_{45}a_{26} + a_{24}a_{15}a_{36} - a_{14}a_{25}a_{36} +$
$+ a_{12}a_{45}a_{36} - a_{23}a_{15}a_{46} + a_{13}a_{25}a_{46} - a_{12}a_{35}a_{46} + a_{23}a_{14}a_{56} - a_{13}a_{24}a_{56} +$
$+ a_{12}a_{34}a_{56}$.

548. $1\cdot 3\cdot 5 \ldots (n-1)$.
549. **Indicación.** El determinante

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & x_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{1n} & \ldots & a_{nn} & x_n \\ -x_1 & \ldots & -x_n & 0 \end{vmatrix},$$

que se obtiene rebordeando D, descomponerlo por la fórmula del problema 541 e igualarlo al cuadrado del agregado de Pfaff para D', aplicándole la fórmula del problema 546. En la igualdad obtenida poner $x_i = x_j = 1$, $x_k = 0$ para $i \neq k \neq j$.

550. **Indicación.** Utilizando el hecho de que el producto de dos polinomios, distintos de cero, es por sí mismo diferente de cero, mostrar que si $D = AB$, es decir, la descomposición supuesta y algún término del polinomio A contiene a_{11}, ningún término de B contiene los elementos de la primera fila (columna). Deducir de aquí que cualesquiera que fuesen $i, j = 1, 2, \ldots, n$, habrá un término en A que contenga a_{ii}, pero ningún término de B contendrá a_{ij}.

551. **Indicación.** Al demostrar 2), definir $\overline{\Delta}_{n-k}$ partiendo de la numeración $t_1, t_2, \ldots, t_{\binom{n}{n-k}}$ de las combinaciones de n números $1, 2, \ldots, n$ según $n-k$, relacionada con la numeración $s_1, s_2, \ldots, s_{\binom{n}{k}}$ que determina Δ_k de modo que t_i contiene aquellos $n-k$ números que no entran en s_i. Si σ_i es la suma de los números de combinaciones s_i, sacar el factor $(-1)^{\sigma_i}$ de la i-ésima fila e i-ésima columna $\left(i=1, 2, \ldots, \binom{n}{n-k}\right)$ del determinante $\overline{\Delta}_{n-k}$. Al demostrar el punto 4), usando las igualdades del punto 3) y la irreductibilidad de D, establecida en el problema anterior, así como el grado de D y Δ_k con respecto al elemento a_{ij}, mostrar $\Delta_k = cD^{\binom{n-1}{k-1}}$, donde c no depende de los elementos a_{ij}. Con el fin de definir c mostrar que tanto Δ_k como también $D^{\binom{n-1}{k-1}}$ contienen el término $(a_{11}a_{22} \ldots a_{nn})^{\binom{n-1}{k-1}}$ con el coeficiente igual a la unidad.

552. $P_n = Q_n = 1$. **Indicación.** Mostrar que $Q_n = P_n^2$.

553. **Indicación.** Mostrar que $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{ki}p_{kj}\varphi(k)$, donde p_{ij} son los mismos que en el problema anterior.

Parte II. Sistemas de ecuaciones lineales

554. $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = -1$.
555. $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.
556. $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 2$, $x_4 = 0$.
557. $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.
558. $x_1 = -0{,}4$, $x_2 = -1{,}2$, $x_3 = 3{,}4$, $x_4 = 1$.
559. $x = 2/3$, $y = -1$, $z = 3/2$, $t = 0$.

560. $x=-3$, $y=0$, $z=-1/2$, $t=2/3$.
561. $x=2$, $y=-3$, $z=-3/2$, $t=1/2$.
562. El sistema no tiene soluciones.
563. El sistema no tiene soluciones.
564. En general, el cambio de numeración de las incógnitas no transforma el sistema en el equivalente, pero al resolver ese sistema, ello se admite a condición de que después de resolver dicho sistema, se vuelve a la numeración inicial. **Indicación.** Mostrar que después de las transformaciones tipo a), b) y c), cualquier ecuación del nuevo sistema se expresa linealmente a través de las ecuaciones del viejo sistema y viceversa.
567. $x_1=-1$, $x_2=3$, $x_3=-2$, $x_4=2$.
568. $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=-3$, $x_4=1$.
569. $x_1=-2$, $x_2=1$, $x_3=4$, $x_4=3$.
570. $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3={}^1/_3$, $x_4=-3/2$.
571. $x_1={}^1/_2$, $x_2=-2/3$, $x_3=2$, $x_4=-3$.
572. $x_1=104\,{}^6/_7$, $x_2=7\,{}^4/_7$, $x_3=-10$, $x_4=1$.
573. $x_1=5$, $x_2=4$, $x_3=3$, $x_4=2$, $x_5=1$.
574. $x_1=3$, $x_2=-5$, $x_3=4$, $x_4=-2$, $x_5=1$.
575. $x_1={}^1/_2$, $x_2=-2$, $x_3=3$, $x_4=2/3$, $x_4=-{}^1/_5$. **Indicación.** Como nuevas incógnitas tomar $2x_1$, $3x_4$, $5x_5$.
576. $x_1=5$, $x_2=4$, $x_3=-3$, $x_4=3$, $x_5=-2$.
577. $x_1=2$, $x_2=-3/2$, $x_3=4$, $x_4=3$, $x_5=5/2$.
578. El sistema es indeterminado, o sea, tiene una cantidad infinita de soluciones; x_1 y x_2 pueden expresarse mediante x_3 y x_4 de este modo: $x_1=6-26x_3+17x_4$, $x_2=-1+7x_3-5x_4$, con la particularidad de que x_3 y x_4 pueden adquirir cualesquiera valores.
579. El sistema es indeterminado. Solución general: $x_1={}^1/_{10}(6-15x_2-x_4)$, $x_3={}^1/_5(1+4x_4)$, donde x_2 y x_4 adquieren cualesquiera valores.
580. El sistema es contradictorio, es decir, no tiene soluciones.
581. El sistema no tiene soluciones.
584. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son todos los elementos del cuerpo conmutativo, el polinomio $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$ es igual a cero, pero tiene el coeficiente de x^n igual a la unidad.
585. $f(x)=x^4-5x+3$. 586. $f(x)=2x^3-5x^2+7$.
587. Para una dirección asintótica prefijada, a través de cualesquiera $n+1$ diferentes puntos del plano, ningún par de los cuales yace en la recta de dirección asintótica, puede trazarse una parábola que no supera el n-ésimo grado y además, sólo una.
588. $y=3x^3-5x^2+1$.
589. $x=y^4-3y^3-5y+5$.

590. $$x=\frac{1}{4}(-a+b+c+d),\quad y=\frac{1}{4}(a-b+c+d),$$
$$z=\frac{1}{4}(a+b-c+d),\qquad t=\frac{1}{4}(a+b+c-d).$$

591. $$x=\frac{1}{2}\left(-\frac{c-ad}{b-a}+\frac{c'-a'b}{b'-a'}+\frac{c''-a''d}{b''-a''}\right),$$
$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{c-ad}{b-a}-\frac{c'-a'd}{b'-a'}+\frac{c''-a''d}{b''-a''}\right),$$
$$z=\frac{1}{2}\left(\frac{c-ad}{b-a}+\frac{c'-a'd}{b'-a'}-\frac{c''-a''d}{b''-a''}\right),$$
$$t=d-\frac{1}{2}\left(\frac{c-ad}{b-a}+\frac{c'-a'd}{b'-a'}+\frac{c''-a''d}{b''-a''}\right).$$

Indicación. Para demostrar la unicidad de la solución mostrar que el determinante del sistema es igual a $2(b-a)(b'-a')(b''-a'')\neq 0$. Con fin de ha-

llar la solución es necesario de la primera, segunda y tercera ecuaciones restar la cuarta, multiplicada por a, a' y a'', respectivamente.

592. $x=\frac{1}{A}(ap-bq-cr-ds)$, $y=\frac{1}{A}(bp+aq-dr+cs)$,

$$z=\frac{1}{A}(cp+dq+ar-bs),\quad t=\frac{1}{A}(dp-cq+br+as),$$

donde $A=a^2+b^2+c^2+d^2$. **Indicación.** Hacer uso del problema 468.

593. $x_k=(-1)^k P_k$, donde P_k es la suma de todos los posibles productos según k de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$. **Indicación.** Hacer uso del problema 346.

594. $x_k=\frac{\prod\limits_{i\neq k}(b-a_i)}{\prod\limits_{i\neq k}(a_k-a_i)}=\frac{f(b)}{(b-a_k)f'(a_k)}$, donde $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots$ $\ldots(x-a_n)$.

595. $x_k=(-1)^{n+k}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b_i f_{ik}}{(a_i-a_1)\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_n)}$,

donde f_{ik} es la suma de todos los posibles productos según $n-k$ de los $n-1$ números $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$.

596. $x_k=\frac{1}{(a_k-a_1)\ldots(a_k-a_{k-1})(a_k-a_{k+1})\ldots(a_k-a_n)}\sum\limits_{i=1}^{n}b_i f_{ki}$, donde f_{ki} es la suma de todos los posibles productos según $n-i$ de $n-1$ números $a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n$.

597. $x_k=\frac{(-1)^k P_{n-k}}{n!}$, donde P_i $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ es la suma de todos los posibles productos según i de n números $1, 2, \ldots, n$ y $P_0=1$.

598. $x_k=\frac{c_k}{a-b}-\frac{b\sum\limits_{i=1}^{n}c_i}{(a-b)[a+(n-1)b]}$.

599. $x_k=\prod\limits_{i\neq k}\frac{b-a_i}{a_k-a_i}$. **Indicación.** El determinante del sistema hay que representarlo en forma de un producto de dos determinantes.

600. **Solución.** $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots$ Por eso $1=$ $=(1+h_1x+h_2x^2+h_3x^3+\ldots)\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\ldots\right)$, de donde $h_1=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}h_1-h_2=\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}h_1-\frac{1}{2}h_2+h_3=\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}h_1-\frac{1}{3}h_2+\frac{1}{2}h_3-$ $-h_4=\frac{1}{5}$, ... Aplicando la regla de Cramer, de las primeras n ecuaciones recibiremos la expresión necesaria para h_n.

602. **Indicación.** Partiendo de la identidad

$$1=(1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\ldots)\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\ldots\right),$$

obtenemos un sistema de ecuaciones para definir $b_1, b_2, b_3, \ldots$ Para demos-

trar que $b_{2n-1}=0$, siendo $n>1$, se observa que $b_1=-1/2$ la y que la función

$$\frac{x}{e^x-1}-1+\frac{1}{2}x=\frac{\frac{1}{2}x\left(e^{x/2}+e^{-x/2}\right)-\left(e^{x/2}-e^{-x/2}\right)}{e^{x/2}-e^{-x/2}}$$

es par.

603. Indicación. Empleando la igualdad $b_1=-\frac{1}{2}$, $b_{2n-1}=0$ para $n>1$, obtenidas en el problema anterior, designar $b_{2n}=c_n$ y en la identidad

$$1=\left(1-\frac{1}{2}x+c_1x^2+c_2x^4+c_3x^6+\dots\right)\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\dots\right)$$

igualar por separado los coeficientes de las potencias pares e impares de x.

604. Indicación. Con el fin de establecer la igualdad requerida en la identidad

$$(x+1)^n=x^n+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^{n-2}x^{n-2}+\dots+C_n^1x+x^0$$

poner $x=1, 2, 3, \dots, k-1$ y sumar las igualdades obtenidas. En la igualdad establecida sustituir n por $n-1$, $n-2$, ..., 2, 1 y del sistema recibido de n ecuaciones lineales con relación a $s_0(k)$, $s_1(k)$, ..., $s_{n-1}(k)$ hallar $s_{n-1}(k)$.

605.

$$l_n=\begin{vmatrix} \frac{2}{3!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{4}{5!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \frac{6}{7!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{2n}{(2n+1)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-4)!} & \dots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}$$

Indicación. Obtener la identidad

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots=$$
$$=x\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots\right)(1+l_1x^2+l_2x^4+\dots).$$

606.

$$f_n=\begin{vmatrix} \frac{2}{3!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{4}{5!} & \frac{1}{3!} & 1 & \dots & 0 \\ \frac{6}{7!} & \frac{1}{5!} & \frac{1}{3!} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{2n}{(2n+1)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-3)!} & \dots & \frac{1}{3!} \end{vmatrix}.$$

607.

$$a_n=\frac{1}{n!}=\begin{vmatrix} \frac{1}{1!} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-3)!} & \dots & \frac{1}{1!} \end{vmatrix}.$$

Indicación. Obtener la identidad

$$1=(1-a_1x+a_2x^2-a_3x^3+\dots)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right),$$

y recibir una ecuación para definir $a_1, a_2, \dots, a_n$.

608. 2. **609.** 3. **610.** 3. **611.** 2.

612. Para $\lambda=0$ el rango de la matriz es igual a 2, para $\lambda\neq 0$ es igual a 3.

613. Para $\lambda=3$ el rango de la matriz es 2, para $\lambda\neq 3$ el rango es igual a 3.

619. 3. **620.** 2. **621.** 3. **622.** 2.

629. Indicación. Utilizando la expresión lineal de todas las columnas de la matriz A mediante las columnas que pasan a través del menor d, mostrar que si $d=0$, las filas de la matriz A que pasan por d, son linealmente dependientes.

630. Si $0\leqslant r\leqslant n-2$, $\hat{r}=0$. Si $r=n-1$, $\hat{r}=1$. Si $r=n$, $\hat{r}=n$. **Indicación.** Hacer uso del problema 509 ó del problema 747.

631. Solución. Demostremos 1). Para $r=0$ todos los menores principales de primero y segundo órdenes son nulos. Si $A=(a_{ij})_n$, $a_{11}=a_{22}=\dots=a_{nn}=0$ y

$$\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}=a_{ii}a_{jj}-a_{ij}^2=-a_{ij}^2=0$$

para cualesquiera $i, j=1, 2, \dots, n$; $i<j$. De aquí $a_{ij}=0$, $i, j=1, 2, \dots, n$; $A=0$; el rango de A es igual a cero, lo que se necesita demostrar. Para $r=n-1$ tenemos $M_{n-1}\neq 0$, $M_r=|A|=0$, el rango de A es $n-1$.

Sea $0\leqslant r\leqslant n-2$. El menor principal $M\neq 0$. Permutando respectivamente las filas y las columnas de la matriz A (lo que no infringe la simetría de la matriz A y no cambia su rango), podemos hacer pasar el menor M_r al ángulo superior izquierdo de la matriz A. Para demostrar 1) es suficiente mostrar que todos los menores de orden $(r+1)$ que rebordean M_r son nulos.

Sea M_{ij} un menor obtenido de M_r rebordeando la i-ésima fila y j-ésima columna ($i, j>r$). Según la condición, $M_{ij}=0$ para $i=j$. Sean $i\neq j$ y D un determinante obtenido de M_r rebordeado por las i-ésima y j-ésima filas e i-ésima y j-ésima columnas. Según la condición, $D=0$. Sea C la matriz del determinante D. Supongamos que $M_{ij}\neq 0$. Entonces el rango de C es $r+1$ y las filas de la matriz C con números $1, 2, \dots, r, i$ son linealmente independientes. Según la simetría de C, las columnas con los mismos números también son linealmente independientes. Basándose en el problema 629, el menor M_{ii} que se encuentra en la intersección de estas filas y columnas se diferencia de cero, lo que contradice la condición. La afirmación 2) se desprende de 1) o directamente del problema 629.

632. Indicación. Emplear el problema anterior.

633. Indicación. Utilizar la solución del problema 631.

634. Indicación. Hacer uso del problema anterior.

636. $(1, 4, -7, 7)$. **637.** $x=(0, 1, 2, -2)$. **638.** $x=(1, 2, 3, 4)$.

639. Es linealmente independiente. **640.** Es linealmente dependiente.

641. Es linealmente independiente. **642.** Es linealmente dependiente.

643. Es linealmente dependiente. **644.** Es linealmente independiente.

651. Indicación. Suponiendo que $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i a_i = 0$, donde no todos λ_i son nulos, y eligiendo entre λ_i el mayor coeficiente de λ_j según el módulo, mostrar que la j-ésima coordenada de la combinación lineal tomada es distinta de cero.

656. Indicación. Suponiendo que dos vectores $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{a}_j$ $(i > j)$ se expresan linealmente a través de los anteriores, hallar la fórmula para el vector $\boldsymbol{b}$ de la expresión de $\boldsymbol{a}_j$ y poner la fórmula hallada en la expresión de $\boldsymbol{a}_i$.

657. Indicación. Poner delante del sistema $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ $\boldsymbol{b}_1$ y borrar los vectores que se expresan linealmente por los precedentes; poner delante del sistema obtenido $\boldsymbol{b}_2$, borrando de nuevo los vectores que se expresan linealmente por los anteriores, etc.

Hacer uso del problema anterior.

658. Indicación. Utilizar los problemas 653 y 657.

659. Indicación. Considerando dicho subsistema ordenado, escribirlo a continuación de éste todos los vectores del sistema y borrar todos los vectores que se expresan linealmente por los anteriores.

662. Es imposible elegir semejantes números.

664. Indicación. Al demostrar 3), utilizar el problema 663, asimismo el problema 658, punto c).

665. $\lambda = 15$. **666.** λ es cualquier número. **667.** λ es cualquier número.

668. λ no es igual a 12. **669.** No existe tal valor de λ.

670. En el problema 665 los vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ son coplanares (es decir, yacen en un mismo plano), pero no son colineales (o sea, no están en una misma recta). Para $\lambda = 15$ el vector $\boldsymbol{b}$ cae en el mismo plano y se expresa mediante $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$, y para $\lambda \neq 15$, éste no se encuentra en dicho plano y no se enuncia a través de esos vectores. En el problema 666 los vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ no son coplanares y cualquier vector del espacio tridimensional se expresa linealmente mediante ellos. En el problema 667 los vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ no son colineales y yacen en el plano $4x_1 - 3x_2 = 0$.

Para cualquier valor de λ el vector $\boldsymbol{b}$ está en el mismo plano y se expresa linealmente por $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$.

En el problema 668 los vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ no son colineales y el vector $\boldsymbol{b}$ no es coplanar a $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$. Siendo $\lambda = 12$, el vector $\boldsymbol{a}_3$ es coplanar a $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ y el vector $\boldsymbol{b}$ no se expresa por medio de $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$. Para $\lambda \neq 12$, los vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ no son coplanares y $\boldsymbol{b}$ se expresa mediante ellos.

En el problema 669 los vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ yacen en el plano $3x_2 - x_3 = 0$. Variando λ desde $-\infty$ hasta $+\infty$, el extremo del vector $\boldsymbol{b}$ describe una recta $x_2 = 2$, $x_3 = 5$, paralela a dicho plano. Para ningún valor de λ el vector $\boldsymbol{b}$ no se encuentra en el plano indicado y no se expresa mediante $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ y $\boldsymbol{a}_3$.

672. Son cuatro los sistemas: 1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3$; 2) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_4$; 3) $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$; 4) $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$.

673. 1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$; 2) $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$.

674. Cualesquiera dos vectores forman una base.

675. 1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_4$; 2) $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$; 3) $\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$.

676. Cualesquiera tres vectores, a excepción de $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_5$ y $\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5$, forman una base.

677. La única base será si, y sólo si, bien todo el sistema coincide con su base, o bien todos los vectores del sistema que no entran en su base, son nulos.

678. Dos bases.

679. La base la forman, por ejemplo, los vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$; $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2$.

680. Una de las bases la forman los vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$; $\boldsymbol{a}_4 = 2\boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2 + 4\boldsymbol{a}_3$.

681. Una de las bases la forman los vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_5$; $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_5$; $\boldsymbol{a}_4 = 3\boldsymbol{a}_1 + 4\boldsymbol{a}_2 - 2\boldsymbol{a}_5$.

682. Indicación. Al demostrar 1), poner en la igualdad $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = 0$ las

expresiones $x_i=\sum_{j=1}^{r}\lambda_{ij}x_j$ $(i=r+1,\ r+2,\ \ldots,\ n)$ y mostrar que $\alpha_j=$ $=-\sum_{i=r+1}^{n}\alpha_i\lambda_{ij},\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ r.$

Aplicando lo dicho, mostrar que si $a_i=(-\lambda_{i,1},\ -\lambda_{i,2},\ \ldots,\ -\lambda_{i,r},$ $0,\ \ldots,\ 1,\ \ldots,\ 0),\ i=r+1,\ r+2,\ \ldots,\ n,$ donde la coordenada igual a la unidad ocupa el $(r+i)$-ésimo lugar y $a=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$, entonces $a=$ $=\sum_{i=r+1}^{n}\alpha_i a_i.$

Al demostrar 2) — 4), emplear el problema 664.

683. $2f_1-3f_2-f_3=0,\ f_1-3f_2+f_4=0.$

684. $f_1-2f_2-f_3=0,\ f_1-3f_2+f_4=0,\ 3f_1-8f_2-f_5=0.$

685. Las formas son linealmente independientes. No existe un sistema principal de relaciones lineales.

686. $2f_1-f_2-f_3=0,$ $2f_1-2f_2+f_4-f_5=0.$

687. $2f_1-f_2=0,$ $f_1-f_3-f_4+f_5=0.$

688. Indicación. Utilizar el problema 661 ó 657.

689. Por ejemplo, la solución general

$$x_1=\frac{x_3-9x_4-2}{11},\ x_2=\frac{-5x_3+x_4+10}{11};$$

la solución particular $x_1=-1,\ x_2=1,\ x_3=0,\ x_4=1.$

690. Por ejemplo, la solución general: $x_3=22x_1-33x_2-11,\ x_4=$ $=-16x_1+24x_2+8$; la solución particular: $x_1=2,\ x_2=1,\ x_3=x_4=0.$

691. Solución general: $x_3=1-3x_1-4x_2,\ x_4=1$; solución particular: $x_1=-1,\ x_2=1,\ x_3=0,\ x_4=1.$

692. El sistema es incompatible.

693. El sistema tiene la única solución: $x_1=3,\ x_2=2,\ x_3=1.$

694. Solución general: $x_3=6-15x_1+10x_2,\ x_4=-7+18x_1-12x_2$; solución particular: $x_1=x_2=x_3=1,\ x_4=-1.$

695. Solución general: $x_3=\frac{34x_1-17x_2-29}{5},\ x_4=\frac{16x_1-8x_2-16}{5}$; solución particular: $x_1=2,\ x_2=1,\ x_3=22/5,\ x_4=8/5.$

696. Solución general: $x_3=2-\frac{27}{13}x_1+\frac{9}{13}x_2,\ x_4=-1+\frac{3}{13}x_1-\frac{1}{13}x_2$; solución particular: $x_1=x_2=1,\ x_3=-8/13,\ x_4=-11/13.$

697. Solución general: $x_1=\frac{-6+8x_4}{7},\ x_2=\frac{1-13x_4}{7},\ x_3=\frac{15-6x_4}{7}$; solución particular: $x_1=-2,\ x_2=2,\ x_3=3,\ x_4=-1.$

698. El sistema es incompatible.

699. Solución general: $x_3=-1-8x_1+4x_2,\ x_4=0,\ x_5=1+2x_1-x_2$; solución particular: $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=-1,\ x_4=0,\ x_5=1.$

700. Solución general: $x_3=13,\ x_4=19-3x_1-2x_2,\ x_5=-34$; solución particular: $x_1=1,\ x_2=8,\ x_3=13,\ x_4=0,\ x_5=-34.$

701. Solución general: $x_3=-\frac{9}{2}-x_1-2x_2,\ x_4=-\frac{25}{2}-2x_1-4x_2,\ x_5=$ $=-\frac{15}{2}-2x_1-4x_2$; solución particular: $x_1=1,\ x_2=-3;\ x_3=\frac{1}{2},\ x_4=$ $=-\frac{5}{2},\ x_5=\frac{5}{2}.$

702. Solución general: $x_3=\frac{4}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2$, $x_4=-\frac{14}{3}x_1-\frac{7}{3}x_2-1$, $x_5=$ $=\frac{4}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2+2$; solución particular: $x_1=x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=-8$, $x_5=4$.

703. El sistema tiene la solución única: $x_1=3$, $x_2=0$, $x_3=-5$, $x_4=11$.

704. El sistema es incompatible.

705. **Indicación.** Al demostrar la existencia del número mínimo de la cantidad de $n-r$ incógnitas independientes, hacer uso de la relación de las soluciones de los sistemas no homogéneo y homogéneo correspondiente de ecuaciones y de que la cantidad de incógnitas del sistema homogéneo que pueden tomar valores arbitrarios, independientes uno de otro, es igual al número máximo de soluciones linealmente independientes y no dependen de la elección de dichas incógnitas.

706. $x_1=\frac{1}{2}x_4+\frac{31}{6}$, $x_2=\frac{2}{3}$, $x_3=-\frac{1}{2}x_4-\frac{7}{6}$.

707. $x_1=x_4-\frac{53}{18}x_5+\frac{20}{9}$, $x_2=-\frac{5}{2}x_4+\frac{5}{6}x_5-\frac{5}{3}$, $x_3=\frac{2}{9}x_5-\frac{1}{9}$.

708. Los sistemas son incompatibles.

709. El sistema tiene la solución única: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-4$, $x_4=$ $=-3$.

710. $x_1=-\frac{12}{205}$, $x_2=\frac{176}{123}+\frac{4}{3}x_3$, $x_4=\frac{97}{205}$. Aquí x_3 es una incógnita libre.

711. $x_1=-\frac{1}{2}-\frac{7}{12}x_2-\frac{5}{4}x_3-\frac{7}{8}x_5$, $x_4=1-\frac{1}{2}x_5$, donde x_2, x_3, x_5 son incógnitas independientes.

712. Para $\lambda\neq 0$ el sistema es incompatible. Para $\lambda=0$ es compatible y la solución general tiene el siguiente aspecto:

$$x_1=\frac{-5x_3-13x_4-3}{2},\quad x_2=\frac{-7x_3-19x_4-7}{2}.$$

713. Para $\lambda=0$ el sistema es incompatible. Para $\lambda\neq 0$, éste es compatible y la solución general tiene el siguiente aspecto: $x_1=\frac{4-\lambda}{5\lambda}-\frac{3}{5}x_3$, $x_2=\frac{9\lambda-16}{5\lambda}-\frac{8}{5}x_3$, $x_4=\frac{1}{\lambda}$.

714. Para $\lambda=1$ el sistema es incompatible. Para $\lambda\neq 1$ éste es compatible y la solución general tiene el siguiente aspecto:

$$x_1=\frac{43-8\lambda}{8-8\lambda}-\frac{9}{8}x_3,\quad x_2=\frac{5}{4-4\lambda}+\frac{1}{4}x_3,\quad x_4=\frac{5}{\lambda-1}.$$

715. El sistema es compatible para cualquier valor de λ. Para $\lambda=8$ la solución general tiene el siguiente aspecto: $x_2=4+2x_1-2x_4$, $x_3=3-2x_4$, donde x_1, x_4 son incógnitas independientes. Para $\lambda\neq 8$ la solución general tiene la forma: $x_1=0$, $x_2=4-2x_4$, $x_3=3-2x_4$, donde x_4 es una incógnita independiente.

716. El sistema es compatible para cualquier valor de λ. Para $\lambda=8$ la solución general tiene el siguiente aspecto: $x_3=-1$, $x_4=2-x_1-\frac{3}{2}x_2$, donde x_1, x_2 son incógnitas independientes. Para $\lambda\neq 8$ la solución general tiene la forma: $x_2=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}x_1$, $x_3=-1$, $x_4=0$, donde x_1 es una incógnita independiente.

717. Para $(\lambda-1)(\lambda+2)\neq 0$ el sistema tiene la única solución: $x_1=$

$= x_2 = x_3 = \frac{1}{\lambda+3}$. Para $\lambda = 1$ la solución general tiene la forma: $x_1 = 1 - x_2 - x_3$, donde x_2 y x_3 son incógnitas independientes. Siendo $\lambda = -2$ el sistema es incompatible.

718. Para $(\lambda - 1)(\lambda + 3) \neq 0$ el sistema tiene la única solución: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1/(\lambda + 3)$. Para $\lambda = 1$ la solución genera ltiene la siguiente forma: $x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4$, donde x_2, x_3 y x_4 son incógnitas independientes. Siendo $\lambda = -3$, el sistema es incompatible.

719. Para $\lambda(\lambda+3) \neq 0$ el sistema tiene la solución única $x_1 = \frac{2-\lambda^2}{\lambda(\lambda+3)}$, $x_2 = \frac{2\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)}$, $x_3 = \frac{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)}$. Para $\lambda = 0$ y para $\lambda = -3$ el sistema es incompatible.

720. Para $\lambda(\lambda + 3) \neq 0$ el sistema tiene la única solución: $x_1 = 2 - \lambda^2$, $x_2 = 2\lambda - 1$, $x_3 = \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1$. Para $\lambda = 0$ la solución general tiene el siguiente aspecto: $x_1 = -x_2 - x_3$, donde x_2, x_3 son incógnitas independientes. Siendo $\lambda = -3$ la solución general tiene la forma: $x_1 = x_2 = x_3$, donde x_3 es la incógnita independiente.

721. Si a, b, c son diferentes de dos en dos, el sistema tiene la solución única:

$$x = \frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)}, \quad y = \frac{(d-a)(d-c)}{(b-a)(b-c)}, \quad z = \frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Si entre los números a, b, c existen sólo dos diferentes, con la particularidad de que $a \neq b$ o $a \neq c$ o $b \neq c$, la solución depende sólo de un parámetro. Por ejemplo, en caso de $d = a \neq b = c$, la solución general tiene el siguiente aspecto: $x = \frac{b-d}{b-a} = 1$, $y = \frac{a-c}{b-a} z$, donde z es la incógnita independiente que desempeña el papel del mencionado parámetro que determina la solución.

Si $a = b = c = d$, la solución depende de dos parámetros, la solución general tiene, por ejemplo, la forma $x = 1 - y - z$, donde y, z son incógnitas independientes. Si entre los números a, b, c dos son diferentes y d no es igual a ninguno de ellos o si $a = b = c \neq d$, el sistema es incompatible.

722. Para $D = abc - a - b - c + 2 \neq 0$ el sistema tiene la única solución: $x = (b - 1)(c - 1)/D$, $y = (a - 1)(c - 1)/D$, $z = (a - 1)(b - 1)/D$. En este caso cualesquiera dos de las incógnitas pueden tener simultáneamente valores nulos, con la particularidad de que la tercera incógnita y el parámetro correspondiente son iguales a la unidad. Por ejemplo, $x = y = 0$, $z = c = 1$. Si $D = 0$, con la particularidad de que uno y sólo uno de los números a, b, c es diferente de la unidad, la solución depende de un parámetro, por ejemplo, para $a \neq b = c = 1$, la solución general tiene la forma $x = 0$, $y = 1 - z$. En este caso una o dos incógnitas son obligatoriamente nulas.

Si $a = b = c = 1$, la solución general tiene la forma $x = 1 - y - z$, con la particularidad de que una o dos de las incógnitas pueden ser nulas. Si $D = 0$ y ninguno de los números a, b, c no son igual a la unidad, el sistema es incompatible. El caso de $D = 0$, con la particularidad de que uno y sólo uno de los números a, b, c es igual a la unidad, es imposible.

723. Si $D = abc - a - b - c + 2 \neq 0$, el sistema tiene la única solución:

$$x = \frac{abc - 2bc + b + c - a}{D}, \quad y = \frac{abc - 2ac + a + c - b}{D},$$

$$z = \frac{abc - 2ab + a + b - c}{D}.$$

Si $D = 0$ y sólo uno de los números a, b, c es diferente de la unidad, la solución depende de un parámetro, por ejemplo, para $a \neq b = c = 1$ la solución general tiene el aspecto: $x = 1$, $y = -z$, donde z es la incógnita independiente. Si

$a = b = c = 1$, la solución depende de dos parámetros y la solución general tiene la forma: $x = 1 - y - z$, donde y, z son incógnitas independientes. Si $D = 0$, con la particularidad de que todos los números a, b, c se diferencian de la unidad, el sistema es incompatible. El caso cuando $D = 0$ y sólo uno de los números a, b, c es igual a la unidad, es imposible. **Indicación.** Para demostrar la incompatibilidad del sistema en caso de $D = 0$ a condición de que todos los números a, b, c son diferentes de la unidad, mostrar la validez de las identidades: $D - D_x = 2\ (b-1)(c-1)$, $D - D_y = 2\ (a-1)(c-1)$, $D - D_z = 2\ (a-1) \times (b-1)$, donde D_x, D_y, D_z son respectivamente los numeradores de las expresiones para x, y, z escritas antes.

724. Por ejemplo, la solución general: $x_1 = 8x_3 - 7x_4$, $x_2 = -6x_3 + 5x_4$. El sistema fundamental de soluciones es:

x_1	x_2	x_3	x_4
8	−6	1	0
−7	5	0	1

725. La solución general: $x_3 = -\frac{5}{2}x_1 + 5x_2$, $x_4 = \frac{7}{2}x_1 - 7x_2$. El sistema fundamental de soluciones es:

x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	−5/2	+7/2
0	1	+5	−7

726. Solución general: $x_4 = -\frac{9x_1 + 6x_2 + 8x_3}{4}$, $x_5 = \frac{3x_1 + 2x_2 + 4x_3}{4}$. El sistema fundamental de soluciones es:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	0	0	−9/4	3/4
0	1	0	−3/2	1/2
0	0	1	−2	1

727. El sistema tiene sólo una solución nula. No existe el sistema fundamental de soluciones.

728. Solución general: $x_4 = \frac{-9x_1 + 3x_2 - 10x_3}{11}$, $x_5 = \frac{-3x_1 + x_2 + 4x_3}{11}$.
El sistema fundamental de soluciones es:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	0	0	−9/11	−3/11
0	1	0	3/11	1/11
0	0	1	−10/11	4/11

729. El sistema tiene sólo una solución nula.

730. Solución general: $x_1 = x_4 - x_5$, $x_2 = x_4 - x_6$, $x_3 = x_4$. Sistema fundamental de soluciones:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	1	1	1	0	0
-1	0	0	0	1	0
0	-1	0	0	0	1

731. Solución general: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{x_3 - 2x_5}{3}$, $x_4 = 0$, donde x_3, x_5 son incógnitas independientes. Sistema fundamental de soluciones:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	1/3	1	0	0
0	$-2/3$	0	0	1

732. Solución general: $x_1 = -3x_3 - 5x_5$, $x_2 = 2x_3 + 3x_5$, $x_4 = 0$, donde x_3, x_5 son incógnitas independientes. Sistema fundamental de soluciones:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-3	2	1	0	0
-5	3	0	0	1

735. $x_1 = 13c$, $x_2 = 2c$, $x_3 = 7c$.

736. $x_1 = 4c_1$, $x_2 = 8c_2$, $x_3 = -3c_1 + 3c_2$, $x_4 = c_1 - c_2$.

737. $x_1 = 2c_1$, $x_2 = c_2$, $x_3 = 3c_3$, $x_4 = -3c_1 - c_2 - 4c_3$, $x_5 = -c_3$.

738. $x_1 = 14c_1$, $x_2 = 42c_2$, $x_3 = 42c_3$, $x_4 = -3c_1 + 3c_2 - 9c_3$, $x_5 = -8c_1 + 8c_2 - 10c_3$.

739. $x_1 = c_1 - 7c_2$, $x_2 = 2c_1 + 6c_2$, $x_3 = c_1 + 3c_2$, $x_4 = -4c_1$, $x_5 = -5c_2$.

740. $x_1 = 11c_1$, $x_2 = 33c_2$, $x_3 = -24c_1 - 57c_2$, $x_4 = 5c_1 + 5c_2$, $x_5 = -c_1 - c_2$.

741. Las filas de la matriz A no lo forman y las de la matriz B lo forman.

742. La cuarta fila junto con cualesquiera dos de las primeras tres filas forma un sistema fundamental, los demás sistemas de filas, no lo forman.

743. Indicación. En la primera parte del problema aplicar el resultado de 734. En la segunda parte, mostrar que si los valores de las incógnitas independientes en cierto sistema de soluciones forman filas linealmente dependientes, todo el sistema de soluciones también es linealmente dependiente.

748. Indicación. Escribir por encima de la matriz del sistema cualquiera de sus filas y el determinante de la matriz obtenida descomponerlo según la primera fila. Hacer uso del problema 746.

749. Solución particular: $x_1 = -2$, $x_2 = -6$, $x_3 = 7$. Solución general: $x_1 = -2c$, $x_2 = -6c$, $x_3 = 7c$.

750. Solución particular: $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$. Solución general: $x_1 = 3c$, $x_2 = -2c$, $x_3 = 0$.

751. Solución particular: $x_1 = -6$, $x_2 = 11$, $x_3 = -9$, $x_4 = 4$. Solución general: $x_1 = 6c$, $x_2 = -11c$, $x_3 = 9c$, $x_4 = -4c$.

752. Solución particular: $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$, $x_4 = 0$. Solución general: $x_1 = 3c$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4c$, $x_4 = 0$.

754. a) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 2b_i$ $(i=1, 2, \ldots, s)$; b) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda b_i$ $(i=1, 2, \ldots, s)$.

755. En ambos casos la condición necesaria y suficiente es la homogeneidad de dicho sistema.

756. A condición de que la suma de los coeficientes de dicha combinación lineal es igual a la unidad.

757. La primera incógnita en cualquier solución adquiere el valor nulo. Si los coeficientes de todas las incógnitas, a excepción de la primera y, por ejemplo de la segunda, son nulos, la segunda incógnita toma un valor determinado que se halla de una ecuación que contiene el coeficiente no nulo de la segunda incógnita si se omiten en ella todos los términos con otras incógnitas; en este caso todas las incógnitas, comenzando por la tercera, pueden tomar cualesquiera valores. Pero si por lo menos tres incógnitas (por ejemplo, x_1, x_2 y x_3) se encuentran con coeficientes no nulos, entonces todas las incógnitas, a excepción de la primera, pueden tomar cualesquiera valores, con la particularidad de que sus valores en cada solución están relacionados mediante una relación obtenida de cualquier ecuación del sistema con coeficiente no nulo de la segunda incógnita si se omite el término con la primera incógnita.

La igualdad a cero de todos los coeficientes de la primera incógnita o de todas las incógnitas, comenzando por la segunda, es imposible para las condiciones del problema.

758. En este caso la condición necesaria y suficiente es que el rango de la matriz de los coeficientes de las incógnitas disminuya en una unidad, al borrar la k-ésima columna, en otras palabras, que la k-ésima columna no sea una combinación lineal de las demás columnas de dicha matriz.

759. El rango de la matriz ampliada (de los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes) debe disminuir en una unidad, al borrar la k-ésima columna.

760. $e = ad - bc = 0$.

761. Una condición que expresa la desigualdad a cero del determinante D de orden r, y $(s-r)(n-r+1)$ condiciones que expresan la igualdad a cero de los determinantes de orden $(r+1)$ que bordean D.

Las últimas condiciones son independientes, ya que cada una contiene un elemento que no entra en las demás condiciones que se halla en la intersección de la fila y columna rebordeantes y tiene el factor $D \neq 0$.

762. Bien por lo menos dos de los números a, b, c, d, e son igual a -1, bien ninguno de ellos es igual a -1, pero entonces

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}+\frac{d}{d+1}+\frac{e}{e+1}=1.$$

763. $\lambda = af + bg + ch = 0$. **Indicación.** Sumar todas las ecuaciones, multiplicándolas de antemano por λx, λy, λz, λt, respectivamente. Obteniendo la condición $\lambda = 0$, el determinante del sistema puede calcularse como antisimétrico, mediante el problema 547.

764. $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$ 765. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

766. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$ Esta condición es suficiente si en el caso de tres rectas paralelas el punto impropio (infinitamente alejado) de dicha dirección se considera su punto común. Si no se admiten los puntos impropios, la condi-

ción necesaria y suficiente será la igualdad de los rangos de dos matrices

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

767. El rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix}$$ debe ser no inferior a tres.

768. Al admitir los puntos impropios, el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$$ debe ser no menos de tres.

Al no admitir los puntos impropios el rango de la matriz citada debe coincidir con el de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \cdot & \cdot \\ a_n & b_n \end{pmatrix}.$$

769. $$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

770. $$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

771. $x^2+y^2-4x-1=0$. El centro está en el punto (2, 0). El radio es igual a $\sqrt{5}$.

772. **Indicación.** Utilizar la respuesta del problema 770.

773. $$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

774. Hipérbola

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1.$$

775. $2x^2+7y^2+y-8=0$. Es una elipse con el centro en el punto $(0, -{}^1/_{14})$ y los semiejes de longitud $\frac{15}{28}\sqrt{14}$ y $\frac{15}{14}$, con la particularidad de que el eje grande es paralelo al eje de las abscisas y el pequeño yace en el eje de ordenadas.

776. $$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

777. $$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0, \text{ ó } 4x+y+3z-8=0.$$

778. Si se admiten los puntos impropios (infinitamente alejados), entonces

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}=0.$$

Si no se admiten los puntos impropios, el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}$$

no debe cambiar al borrar la última columna.

779. El rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & c_n & d_n \end{pmatrix}$$

es igual a dos y no cambia al borrar la última columna.

780. $$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

781. $x^2 + y^2 + z^2 - x - 2 = 0$. El centro se halla en el punto $(1/2, 0, 0)$. El radio es igual a 3/2.

782. El sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas en el cual la matriz ampliada y tres matrices de los coeficientes de las incógnitas, para cualquier par de ecuaciones, todas tienen el rango 2.

783. El sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, en el cual los rangos de las matrices de los coeficientes de las incógnitas en cualquier par de ecuaciones son iguales a dos y el rango de la matriz ampliada es tres.

784. El sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, en el cual los rangos de todas las matrices de los coeficientes de las incógnitas de cualesquiera dos ecuaciones, así como de las tres son iguales a dos y el rango de la matriz ampliada es igual a tres.

785. El sistema de cuatro ecuaciones lineales con tres incógnitas, en el cual los rangos de las matrices de los coeficientes de las incógnitas de cualesquiera tres ecuaciones son iguales a tres y el rango de la matriz ampliada es igual a 4.

786. Los cuatro planos pasan a través de un punto, con la particularidad de que cualesquiera tres de ellos no pasan por una misma recta.

787. Si no se examinan las rectas y los planos impropios (infinitamente alejados), las ecuaciones de tipo $0x + 0y = a$ y $0x + 0y + 0z = a$ para a distinto de cero, no tienen sentido geométrico, mientras que para $a = 0$ se satisfacen por las coordenadas de cualquier punto del plano o del espacio. Eliminando las ecuaciones de este tipo y designando el rango de la matriz, compuesta de los coeficientes de las incógnitas por r y el rango de la matriz ampliada por r_1, tenemos:

Para los sistemas con dos incógnitas:

1. $r = 2$, $r_1 = 3$. El sistema no tiene soluciones. Las rectas no pasan a través de un punto, además por lo menos dos de ellas son diferentes y se intersecan.

2. $r = r_1 = 2$. El sistema tiene la única solución. Las rectas pasan a través de un punto, con la particularidad de que por lo menos dos de ellas son distintas.

3. $r = 1$, $r_1 = 2$. El sistema no tiene soluciones. Las rectas son paralelas o coinciden, con la particularidad de que por lo menos dos rectas son distintas.

4. $r = r_1 = 1$. La solución depende de un parámetro. Todas las rectas coinciden.

Para el sistema con tres incógnitas:

1. $r = 3$, $r_1 = 4$. El sistema no tiene soluciones. Los planos no pasan por un mismo punto, con la particularidad de que por lo menos tres de ellos son diferentes y pasan a través de un mismo punto.

2. $r = r_1 = 3$. El sistema tiene la única solución. Los planos pasan por un mismo punto, con la particularidad de que por lo menos tres de ellos no pasan por una misma recta.

3. $r = 2$, $r_1 = 3$. El sistema no tiene soluciones. Los planos no pasan por un mismo punto, además, por lo menos tres de ellos son distintos y cualesquiera tres planos diferentes bien no tienen un punto común, o bien pasan por una misma recta.

4. $r = r_1 = 2$. La solución depende de un parámetro. Todos los planos pasan por una misma recta, además, por lo menos dos de ellos son diferentes.

5. $r = 1$, $r_1 = 2$. El sistema no tiene soluciones. Los planos son paralelos o coinciden, con la particularidad de que por lo menos dos de ellos son diferentes.

6. $r = r_1 = 1$. La solución depende de dos parámetros. Todos los planos coinciden.

Parte III. Matrices y formas cuadráticas

788. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$. 789. $\begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$. 790. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$.

791. $\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}.$ **792.** $\begin{pmatrix} 10 & 17 & 19 & 23 \\ 17 & 23 & 27 & 35 \\ 16 & 12 & 9 & 20 \\ 7 & 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}.$

793. $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -5 & -10 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$ **794.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

795. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$ **796.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$ **797.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$

798. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$ **799.** $\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}.$ **800.** $\begin{pmatrix} 304 & -61 \\ 305 & -62 \end{pmatrix}.$

801. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ para n par, $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ para n impar.

802. $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\operatorname{sen} n\alpha \\ \operatorname{sen} n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}.$

803. $\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$

804. $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$ **805.** $\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$

806. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & \dots & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & 3 & \dots & \frac{(n-1)n}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{(n-2)(n-1)}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$

onde n es el orden de dicha matriz.

807. $\begin{pmatrix} 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & C_{n-1}^3 & \dots & C_{n-1}^{n-1} \\ 0 & 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \dots & C_{n-1}^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & C_{n-1}^1 & \dots & C_{n-1}^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

808. $\begin{pmatrix} 3197 & -1266 \\ 7385 & -922 \end{pmatrix}$. 809. $\begin{pmatrix} 190 & 189 & -189 \\ 126 & 127 & -126 \\ 252 & 252 & -251 \end{pmatrix}$.

811. a) las i-ésima y j-ésima filas del producto cambian de lugar; b) a la i-ésima fila del producto se le añade la j-ésima fila, multiplicada por c; c) las i-ésima y j-ésima columnas del producto cambian de lugar; d) a la i-ésima columna del producto se le añade la j-ésima columna multiplicada por c.

822. $\begin{pmatrix} a & 2b \\ 3b & a+3b \end{pmatrix}$, donde a y b son números cualesquiera.

823. $\begin{pmatrix} a & 3b \\ -5b & a+9b \end{pmatrix}$, donde a y b son números cualesquiera.

824. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. 825. $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

826. $c = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}$ $(k=0, 1, 2, \dots, n-1)$, n es el orden de la matriz A.

827. $f(A) = \begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 4 & 10 \\ -9 & 22 & 26 \end{pmatrix}$. 828. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

830. **Indicación**. Considerar las matrices de orden n como vectores n^2-dimensionales.

831. **Indicación**. Aplicar el problema 814.

Observación. En el problema se supone que los elementos de las matrices A y B son números. Para un campo de característica $p \neq 0$ el resultado es incorrecto. Así, pues, para las matrices de orden p

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p-1 & 0 \end{pmatrix} \text{ tenemos } AB - BA = E.$$

832. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, donde a, b, c son cualesquiera números que satisfacen la relación $a^2 + bc = 0$.

833. **Indicación**. Utilizando el problema 829, demostrar que si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^k = (a+d)^{k-1} A.$$

834. $\pm E$ ó $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, donde $a^2 + bc = 1$.

835. Si $|A| \neq 0$, $X = 0$; si $|A| = 0$, pero $A \neq 0$, con la particularidad de que la relación de los elementos de la primera columna de la matriz A

con respecto a los correspondientes elementos de la segunda columna $= \alpha$, $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -\alpha x & -\alpha y \end{pmatrix}$ para cualesquiera x, y; si ambos elementos de la segunda columna de la matriz A son nulos, pero al menos un elemento de la primera columna se diferencia de cero, $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{pmatrix}$, siendo x, y cualesquiera; si $A = 0$, X es cualquier matriz.

836. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. 837. $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$. 838. $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

839. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. 840. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$.

841. $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. 842. $\begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

843. $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. 844. $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

845. $\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$. 846. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

847. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$,

n es el orden de la matriz.

848. $\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

849. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a^2 & -a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a^3 & a^2 & -a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-a)^n & (-a)^{n-1} & (-a)^{n-2} & (-a)^{n-3} & \dots & a & 1 \end{pmatrix}$.

850. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

851. $\frac{1}{n+1}\begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 1 \\ n-1 & 2(n-1) & 2(n-2) & 2(n-3) & \dots & 2 \\ n-2 & 2(n-2) & 3(n-2) & 3(n-3) & \dots & 3 \\ n-3 & 2(n-3) & 3(n-3) & 4(n-3) & \dots & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$.

852. $\begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$.

853. $\frac{1}{n-1}\begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2-n \end{pmatrix}$.

854. $\frac{1}{a(n+a)}\begin{pmatrix} 1-n-a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n-a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n-a & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n-a \end{pmatrix}$.

855. $-\frac{1}{s}\begin{pmatrix} \frac{1-a_1 s}{a_1^2} & \frac{1}{a_1 a_2} & \frac{1}{a_1 a_3} & \dots & \frac{1}{a_1 a_n} \\ \frac{1}{a_2 a_1} & \frac{1-a_2 s}{a_2^2} & \frac{1}{a_2 a_3} & \dots & \frac{1}{a_2 a_n} \\ \frac{1}{a_3 a_1} & \frac{1}{a_3 a_2} & \frac{1-a_3 s}{a_3^2} & \dots & \frac{1}{a_3 a_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{a_n a_1} & \frac{1}{a_n a_2} & \frac{1}{a_n a_3} & \dots & \frac{1-a_n s}{a_n^2} \end{pmatrix}$,

donde $s=1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}$.

857. $\begin{pmatrix} -7 & 5 & 12 & -19 \\ 3 & -2 & -5 & 8 \\ 41 & -30 & -69 & 111 \\ -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix}$.

858.
$$\frac{1}{ns}\begin{pmatrix} 1-s & 1+s & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1-s & 1+s & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-s & \dots & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1+s & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-s \end{pmatrix}$$

donde $s=\frac{n(n+1)}{2}$.

Indicación. En el sistema de ecuaciones para los elementos de la k-ésima columna de la matriz inversa de cada ecuación, —desde la primera hasta la $(n-1)$-ésima— restar la siguiente y sumar las $n-1$ ecuaciones obtenidas. Expresar todas las incógnitas a través de las k-ésimas.

859.
$$\frac{1}{nhs}\begin{pmatrix} h-s & h+s & h & \dots & h & h \\ h & h-s & h+s & \dots & h & h \\ h & h & h-s & \dots & h & h \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h+s & h & h & \dots & h & h-s \end{pmatrix},$$

donde $s=na+h\cdot\frac{n(n-1)}{2}$ es la suma de los elementos de alguna fila o columna) de dicha matriz.

860.
$$\frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon^{-1} & \varepsilon^{-2} & & \varepsilon^{-3} & \varepsilon^{-(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^{-2} & \varepsilon^{-4} & & \varepsilon^{-6} & \varepsilon^{-2(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^{-3} & \varepsilon^{-6} & & \varepsilon^{-9} & \varepsilon^{-3(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varepsilon^{-(n-1)} & \varepsilon^{-2(n-1)} & & \varepsilon^{-3(n-1)} & \varepsilon^{-(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

Indicación. Con el fin de determinar los elementos de la k-ésima columna de la matriz inversa, escribir las ecuaciones con las incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$. Cada una de las ecuaciones multiplicarla por un grado ε, tal que el coeficiente de la incógnita determinada x_j se convierta en unidad. Las ecuaciones obtenidas sumarlas.

861. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. 862. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$. 863. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

864. $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ 865. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. 866. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

867. La forma general de la solución

$$\begin{pmatrix} \frac{2+3c_1}{2} & \frac{3+3c_2}{2} \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix},$$ donde c_1 y c_2

son números cualesquiera.

868. La forma general de la solución:

$$\begin{pmatrix} c_1 & \frac{2-3c_1}{4} \\ c_2 & \frac{9-3c_2}{4} \end{pmatrix},$$ donde c_1 y c_2 son números arbitrarios.

869. No existe solución.

870. La forma general de la solución:

$$\begin{pmatrix} 7-3c_1 & 5-3c_2 & 7-3c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 5c_1-9 & 5c_2-3 & 5c_3-7 \end{pmatrix},$$ donde c_1, c_2, c_3 son números arbitrarios.

871. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

872. En la matriz A^{-1} respectivamente: a) cambian de lugares las i-ésima y j-ésima columnas; b) la i-ésima columna se multiplica por $^1/c$; c) de la j-ésima columna se resta la i-ésima, multiplicada por c.

Al transformar las columnas de la matriz A, en forma análoga a lo indicado, varían las filas de la matriz A^{-1}.

879. $$A^{-1}=\begin{pmatrix} E_k & -U \\ 0 & E_l \end{pmatrix}.$$

881. Al multiplicar A a la izquierda por H_1 todas las filas de A se desplazan en una fila hacia arriba, con la particularidad de que la primera desaparece y la última se sustituye por la nula.

Al multiplicar A a la derecha por H_1 transcurre la misma variación, desplazando las columnas a la derecha. Al multiplicar por H_{-1} a la izquierda (derecha) sucede semejante desplazamiento de las filas hacia abajo (de las columnas a la izquierda, respectivamente).

890. La condición $AB = -BA$ se satisface, por ejemplo, para las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Indicación. Al construir las matrices A y B, hacer uso de la indicación del problema 747.

897. **Indicación.** Utilizar el valor del determinante recíproco (problema 506) y reducir el problema al anterior.

898. **Indicación.** Hacer uso de la indicación del problema anterior.

899. **Indicación.** Utilizar la identidad del problema 502 o la fórmula de Binet—Cauchy en el problema 499.

900. **Indicación.** Utilizar la identidad del problema 504.

901. **Indicación.** Utilizar la fórmula de Binet—Cauchy en el problema 499.

902. **Indicación.** Utilizar la fórmula de Binet—Cauchy en el problema 499.

903. **Indicación.** Utilizar los problemas 896 y 507.

904. **Indicación.** Utilizar el problema 507.

905. Los elementos diagonales son iguales a ± 1.

906. Los elementos diagonales son iguales a la unidad según el módulo.

913. **Indicación.** Utilizar la fórmula de Binet—Cauchy, dada en el problema 499 o la indicación de ese mismo problema.

915. **Indicación.** Hacer uso del problema anterior.

920. Hacer uso del problema 913.

921. **Indicación.** Aplicar el teorema de Laplace, la desigualdad de Cauchy—Buniakovski y la fórmula de Binet—Cauchy (véase los problemas 503 y 499).

922. **Indicación.** Sean n la cantidad de filas en A, B, C; k la cantidad de columnas en B, l la cantidad de columnas en C. Comprobar el cumplimiento de la desigualdad en los casos: $k+l>n$ y el rango de $A<k+l\leqslant n$.

Mostrar que para $k+l=n$ el problema coincide con el anterior. Verificar que la desigualdad se convierte en igualdad, siendo $k+l\leqslant n$ y una condición

complementaria $B' \cdot C = 0$. Por fin, cuando el rango $A = k + l < n$, completar A hasta una matriz cuadrada $(A, D) = P = (B, Q)$, donde $Q = (C, D)$, mediante $n - k - l$ columnas linealmente independientes, de modo que $A'D = 0$ (eso puede hacerse, construyendo un sistema fundamental de soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones con la matriz A'), emplear el caso anterior a las matrices $P = (A, D)$ y $Q = (C, D)$ y tomar en consideración que $P = (B, Q)$ y $|D'D| > 0$.

923. Indicación. Emplear varias veces la desigualdad del problema anterior.

924. Indicación. Emplear reiteradamente las desigualdades del problema 922.

925. Indicación. Emplear los razonamientos, semejantes a los citados en la indicación del problema 922.

926. Indicación. Emplear reiteradamente la desigualdad del problema anterior y utilizar la respuesta del problema 532.

927. La permutación de las i-ésima y j-ésima filas o las i-ésima y j-ésima columnas se obtiene multiplicando por la matriz, cuyos elementos $p_{kk} = 1$ para k que no es igual a i, j, $p_{ij} = p_{ji} = 1$, y todos los demás son nulos.

La multiplicación de la i-ésima fila (columna) por un número $c \neq 0$ se obtiene multiplicando por una matriz que se diferencia de la matriz unidad sólo con que el i-ésimo elemento en la diagonal principal a_{ii} es igual a c. La adición a la i-ésima fila de la j-ésima, multiplicada por c, se obtiene multiplicando a la izquierda por una matriz que se diferencia de la matriz unidad sólo con que el elemento $p_{ij} = c$.

Para una transformación análoga de las columnas es necesario multiplicarlas por una matriz semejante que tiene $p_{ij} = c$.

Indicación. Para determinar el aspecto de las matrices buscadas efectuar dicha transformación elemental sobre la matriz unidad, cuyo orden es igual a la cantidad de filas de la matriz A en caso que se transformen las filas, y a la cantidad de columnas de la misma matriz, en caso de transformar las columnas. Comprobar que las matrices obtenidas satisfacen las exigencias del problema.

928. Indicación. Utilizar el problema 927 y mostrar que la transformación tipo a) puede sustituirse por varias transformaciones tipo b) y c).

929. Indicación. Hacer uso de los problemas 617 y 927.

930. Indicación. Hacer uso del problema 623.

931. Indicación. Aplicar a la matriz A el problema 929 y hacer uso de los problemas 915, 930 y 914.

933. Indicación. Utilizar el problema 927.

934. $\begin{pmatrix} 24 & 3 & -4 & -8 \\ -23/2 & -1 & 2 & 7/2 \\ 10 & 1 & -2 & -3 \\ -5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.   **935.** $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1/4 & -9/4 & 3/2 \\ 1/4 & 3/4 & -1/2 \end{pmatrix}$.

936. $\begin{pmatrix} -1/6 & 1/2 & -7/6 & 10/3 \\ -7/6 & -1/2 & 5/6 & -5/3 \\ 3/2 & 1/2 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

938. Indicación. Para demostrar la necesidad, hay que tomar en calidad de B cualquier columna no nula de la matriz A.

939. Indicación. Para demostrar la necesidad hay que tomar en calidad de B una matriz de cualesquiera r columnas linealmente independientes de la matriz A; la i-ésima columna de C formarla de los coeficientes en la expresión de la i-ésima columna de A por medio de las columnas de B. Utilizar el problema 914.

941. Indicación. Utilizar los problemas 626 y 931.

943. Indicación. Reducir dicha matriz A a la matriz normal mediante transformaciones elementales de números enteros. Para ello después de elegir el elemento mínimo, según el valor absoluto, pero no nulo, mediante las transformaciones elementales de números enteros, sustituir los elementos de la fila y columna, en los que se halla dicho elemento, por sus restos al dividirlos por éste. Repetir ese procedimiento hasta que todos los elementos de la i-ésima fila y j-ésima columna, a excepción de a_{ij}, se anulen. Si algún elemento a_{kl} en la nueva matriz no se divide por a_{ij}, a la i-ésima fila es necesario añadirle la k-ésima y pasar otra vez al resto. Hacer eso hasta que todos los elementos de cierta p-ésima fila y q-ésima columna, a excepción de a_{pq}, se conviertan en ceros y todos los demás elementos se dividan por a_{pq}. Luego trasladar a_{pq} al ángulo superior izquierdo y comenzar las transformaciones análogas con la matriz reducida obtenida borrando la primera fila y la primera columna, etc. Para demostrar la unicidad de la forma normal, designemos por d_k el máximo común divisor de todos los elementos de la matriz A de rango r y con m filas y n columnas para $k = 1, 2, \ldots, r$ y pongamos $d_k = 0$ para $r < k \leqslant m, n$. Mostrar que los divisores de los menores d_k no varían al ejecutar las transformaciones elementales de números enteros y que los elementos $e_1, e_2, \ldots$ en la diagonal principal de la matriz normal, equivalente a A, que están relacionados con los divisores de los menores mediante las igualdades $d_k = e_1, e_2, \ldots, e_k$ $(k \leqslant m, n)$, de donde

$$e_k = \frac{d_k}{d_{k-1}} \ (k = 1, 2, \ldots, r) \ e_k = 0 \text{ para } r < k \leqslant m, n.$$

944. Indicación. Para demostrar la posibilidad de la representación requerida utilizar el problema 927. Al demostrar la unicidad de dos representaciones $A = P_1R_1 = P_2R_2$ deducir que la matriz $C = P_2^{-1}P_1 = R_2R_1^{-1}$ es triangular, unimodular y de números enteros, cuyos elementos en la diagonal principal son positivos y, por lo tanto, iguales a la unidad. A continuación igualando los $(k+1)$-ésimo, $(k+2)$-ésimo, etc., elementos de la k-ésima fila en la igualdad $CR_1 = R_2$, mostrar que todos los elementos de la matriz C por la derecha de la diagonal principal son nulos, o sea, $C = E$.

945. Indicación. Utilizar el problema 927.

949. Solución. Reduzcamos la matriz A a una matriz triangular superior C mediante las siguientes transformaciones elementales de las filas: $a_{11} = d_1 \neq 0$. Restando la primera fila, multiplicada por números adecuados, de las demás filas, reducimos la matriz A a la forma

$$A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^1 & a_{23}^1 & \ldots & a_{2n}^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{n2}^1 & a_{n3}^1 & \ldots & a_{nn}^1 \end{pmatrix},$$

puesto que los menores que contienen la primera fila no cambiaron, $d_2 = a_{11}a_{22}^1 \neq 0$, de donde $a_{22}^1 \neq 0$. Restando de las filas yacentes más abajo la segunda fila de la matriz A^1 con factores adecuados, convertiremos en cero los segundos elementos de esas filas, etc. Después de r pasos todos los elementos de las primeras r columnas que se encuentran más abajo de la diagonal, se anularán. Ya que el rango de la matriz obtenida $A^{(r)} = C$ es igual al rango de A, es decir, es r, todos los elementos de las últimas $n - r$ filas de la matriz C son nulas y, por lo tanto, C es una matriz triangular superior. En virtud del problema 927 $C = PA$, donde P es el producto de varias matrices triangulares inferiores, o sea, de nuevo la matriz triangular inferior $A = P^{-1}C = BC$, donde $B = P^{-1}$ es una matriz triangular inferior. Así se demuestra la existencia de la descomposición tipo (2).

Supongamos que se da cualquier representación tipo (2). Según la fórmula para los menores del producto de las matrices (problema 913) tenemos

$$A\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & k-1, & i\\ 1, & 2, & \ldots, & k-1, & k\end{pmatrix}=$$
$$=\sum_{j_1<j_2<\ldots<j_k} B\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & k-1, & i\\ j_1, & j_2, & \ldots, & j_{k-1}, & j_k\end{pmatrix} C\begin{pmatrix}j_1, & j_2, & \ldots, & j_{k-1}, & j_k\\ 1, & 2, & \ldots, & k-1, & k\end{pmatrix}.$$

Pero las primeras k columnas de la matriz C contienen sólo un menor de k-ésimo orden, distinto de cero, por eso

$$A\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & k-1, & i\\ 1, & 2, & \ldots, & k-1, & k\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & k-1, & i\\ 1, & 2, & \ldots, & k-1, & k\end{pmatrix} C\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & k\\ 1, & 2, & \ldots, & k\end{pmatrix}=$$
$$=b_{11}b_{22}\ldots b_{k-1,\,k-1}b_{ik}c_{11}c_{22}\ldots c_{kk}\quad (i=k,\ k+1,\ \ldots,\ n;$$
$$k=1,\ 2,\ \ldots,\ r).\qquad \text{(a)}$$

Suponiendo en este caso $i=k$, hallamos

$$d_k=b_{11}b_{22}\ldots b_{kk}c_{11}c_{22}\ldots c_{kk}\ (k=1,\ 2,\ \ldots,\ r).\qquad \text{(b)}$$

Dividiendo (b) por una igualdad semejante, sustituyendo k por $k-1$, obtendremos (3). Dividiendo (a) por (b), obtendremos la primera de las fórmulas (4). La segunda fórmula se obtiene de modo análogo.

Sea D cualquier matriz diagonal regular con elementos $d_1, d_2, \ldots, d_n$ en la diagonal principal. Entonces $A=BC=(BD)(D^{-1}C)$. La matriz BD se obtiene de B multiplicando las columnas por $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$. La matriz $D^{-1}C$ se obtiene de C multiplicando las filas por $D_1^{-1}, D_2^{-1}, \ldots, D_n^{-1}$. Por ello, para las condiciones (3) los elementos diagonales de B y C pueden tomarse cualesquiera. En el producto BC los elementos de las últimas $n-r$ columnas de B se multiplican por los elementos de las últimas $n-r$ filas de C. Por lo tanto, si uno de estos elementos se considera nulo, los demás pueden tomarse cualesquiera.

951. Indicación. Utilizar la solución del problema 949 y mostrar que para las condiciones $b_{kk}=c_{kk}=\sqrt{\frac{d_k}{d_{k-1}}}$, las condiciones (3) se satisfacen y las (4) nos dan: $b_{ik}=c_{ki}$ $(i=k+1,\ k+2,\ \ldots,\ n;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ r)$.

952. $AB=C=(C_{ij})$, donde $C_{11}=\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$, $C_{12}=\begin{pmatrix}2 & 4\\9 & 6\end{pmatrix}$, $C_{21}=(8)$, $C_{22}=(9,\ 1)$, $C=\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 2 & 4\\ 9 & 9 & 6\\ 8 & 9 & 1\end{pmatrix}$.

954. Indicación. Examinar el producto de la i-ésima fila celular por la i-ésima columna celular.

957. P es una matriz celular cuadrada con células unitarias cuadradas de órdenes $m_1, m_2, \ldots, m_s$ por la diagonal principal, con la particularidad de que la célula que se encuentra en la intersección de la i-ésima fila celular y la j-ésima columna celular coincide con la matriz X, mientras todas las demás células fuera de la diagonal son nulas. De modo análogo, Q es una matriz celular de células unitarias cuadradas de órdenes $n_1, n_2, \ldots, n_t$ en la diagonal principal, con la matriz Y en la intersección de la j-ésima fila celular de la i-ésima columna celular y las células nulas en otros lugares.

958. Indicación. De la segunda fila celular restar la primera multiplicada a la izquierda por la matriz CA^{-1} y aplicando el problema anterior, mostrar que en este caso el rango no varía.

959. Solución. La misma serie de transformaciones elementales que convierte la matriz R en R_1, transforma la matriz $T=\begin{pmatrix}A & B\\ -C & -CA^{-1}B\end{pmatrix}$ en la

matriz $T_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & X - CA^{-1}B \end{pmatrix}$. Según el problema anterior el rango de T es igual a n. Ya que las transformaciones elementales no cambian el rango de la matriz, el rango de T_1 = rango de $T = n$ y el rango de A_1 = rango de $A = n$. Por eso, $X - CA^{-1}B = 0$; $X = CA^{-1}B$.

960. $$A^{-1} = \begin{pmatrix} -20 & 8 & 11 \\ 17 & -7 & -9 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$ **961.** $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

962. $$X = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

963. Solución. Las propiedades a) y b) se desprenden fácilmente de la definición del producto de Kronecker. Para demostrar c) no escribiremos en calidad de índices de los elementos del producto de Kronecker los números de los pares, sino los propios pares (con la particularidad de que los números de un par los escribiremos juntos y sin paréntesis). Pongamos $AB = F$, $CD = G$, $F \times G = H$, $A \times C = P$, $B \times D = Q$. Entonces

$$h_{i_1i_2,\ j_1j_2} = f_{i_1j_1}g_{i_2j_2} = \sum_{s=1}^{m} a_{j_1s}b_{sj_1} \sum_{t=1}^{n} c_{i_2t}n_{tj_2} =$$
$$= \sum_{s,\ t} a_{i_1s}c_{i_2t}b_{sj_1}d_{tj_2} = \sum_{s,\ t} p_{i_1i_2,\ st}q_{st,\ j_1j_2},$$

de donde $H = PQ$.

964. a) Para el producto directo por la derecha es necesario coger la disposición léxico-gráfica de los pares: (1, 1), (1, 2), . . ., (1, n), (2, 1), (2, 2), ..., (2, n), . . ., (m, n). Para el producto por la izquierda la disposición (1, 1), (2, 1), . . ., (m, 1), (1, 2), (2, 2), . . ., (m, 2), . . ., (m, n), que se obtienen mediante la anotación léxico-gráfica de los mismos pares que se leen de derecha a izquierda. Las propiedades b), c) y d) se desprenden directamente de la definición. La propiedad e) se desprende de las relaciones c) del problema anterior y d) del presente. Las propiedades del producto por la izquierda se deducen de las correspondientes propiedades del producto por la derecha mediante las relaciones b).

965. Indicación. Mostrar que el cambio de numeración de los pares no cambia el determinante $|A \times B|$, y usando la propiedad c) del problema 963, representarlo como $|A \times B| = |(AE_m) \times (E_nB)| = |A \times E_n| \cdot |E_m \times B| = |A \cdot \times E_n| \cdot |E_m \times \cdot B|$.

966. Indicación. Emplear la tesis de que de $|A| = 0$ se desprende que el rango de $\hat{A} \leqslant 1$, demostrado en el problema 630.

967. Solución. Ponemos $AB = C$ y designamos por A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} los cofactores, respectivamente, y por M_{ij}, N_{ij}, P_{ij} los menores de los elementos en la i-ésima fila y j-ésima columna de las *matrices* A, B, C.

Entonces, empleando la expresión del menor del producto de dos matrices mediante los menores de esas matrices (problema 913), hallamos:

$$\hat{c}_{ij} = C_{ji} = (-1)^{j+i} P_{ji} = (-1)^{j+i} \sum_{k=1}^{n} M_{jk}N_{ki} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} M_{jk} (-1)^{k+i} N_{ki} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} A_{jk}B_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \hat{B}_{ik}\hat{A}_{kj},$$

de donde $\hat{C} = \hat{B} \cdot \hat{A}$.

Para las matrices regulares A y B el mismo resultado se obtiene por un camino más corto, así: según el problema anterior $\hat{A} = |A| \cdot A^{-1}$, de aquí $(\hat{A}B) =$

$= | AB | \cdot (AB)^{-1} = | A | \cdot | B | B^{-1}A^{-1} = \hat{B}\hat{A}$. Para las matrices con elementos numéricos el caso de las matrices degeneradas se obtiene mediante el paso límite. El polinomio respecto a λ, igual al determinante $| A + \lambda E |$ tiene el grado n y la cantidad de raíces no supera a n. Por lo tanto, puede tomarse una sucesión de números $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = 0$, tal que las matrices $A + \lambda_k E$ y $B + \lambda_k E$ serán regulares. Según lo demostrado, $[(A + \lambda_k E)(B + \lambda_k E)]\hat{} = (B + \lambda_k E)\hat{} \cdot (A + \lambda_k E)$. Pasando al límite para $k \to \infty$ obtenemos $(\widehat{AB}) = \hat{B}\hat{A}$.

968. Indicación. a) Se deduce del problema 913, b) demostrar para el caso cuando $| A | = 0$, empleando el problema 747, y para $| A | \neq 0$, usando la relación $\widetilde{A} = | A | \cdot CA'^{-1}C$, donde C es una matriz diagonal con elementos $1, -1, 1, -1, \ldots$, en la diagonal principal.

969. Indicación. Utilizar el problema 913.

970. Por ejemplo, la numeración de las combinaciones en un orden léxicográfico para el cual la combinación $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ precede a la combinación $j_1 < j_2 < \ldots < j_p$, si la primera diferencia $j_1 - i_1, j_2 - i_2, \ldots, j_p - i_p$, diferente de cero, es positiva.

971. Indicación. Demostrar la igualdad propuesta primero para la matriz triangular A, empleando el hecho de que el cambio del orden de la numeración de las combinaciones no varía el determinante de la matriz asociada A_p y empleando el problema anterior. El caso general se reduce a las matrices triangulares con ayuda de los problemas 928 y 969.

972. Solución. En virtud del problema 956 de $AB = E_n$ se desprende que $A_pB_p = E_N$, donde $N = C_n^p$; de aquí

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_p\leqslant n} A\begin{pmatrix} j_1, & j_2, & \ldots, & j_p \\ i_1, & i_2, & \ldots, & i_p \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \ldots, & i_p \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_p \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{si } \sum\limits_{s=1}^{p} (j_s - k_s)^2 = 0 \\ 0, & \text{si } \sum\limits_{s=1}^{p} (j_s - k_s)^2 > 0 \end{cases} \quad \left(1 \leqslant \begin{matrix} j_1 < j_2 < \ldots < j_p \\ k_1 < k_1 < \ldots < k_p \end{matrix} \leqslant n\right). \qquad (2)$$

Por otra parte, según el teorema de Laplace, hallamos

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_p\leqslant n} A\begin{pmatrix} j_1, & j_2, & \ldots, & j_p \\ i_1, & i_2, & \ldots, & i_p \end{pmatrix} (-1)^{\sum\limits_{s=1}^{p}(i_s+k_s)} \times$$

$$\times A\begin{pmatrix} k'_1, & k'_2, & \ldots, & k'_{n-p} \\ i'_1, & i'_2, & \ldots, & i'_{n-p} \end{pmatrix} = \begin{cases} |A|, & \text{si } \sum\limits_{s=1}^{p} (j_s - k_s)^2 = 0, \\ 0, & \text{si } \sum\limits_{s=1}^{p} (j_s - k_s)^2 > 0, \end{cases} \qquad (3)$$

donde $i'_1 < i'_2 < \ldots < i'_{n-p}$ junto con $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ y $k'_1 < k'_2 < \ldots < k'_{n-p}$ junto con $k_1 < k_2 < \ldots < k_p$ forman un sistema completo de índices $1, 2, \ldots, n$.

Ya que el sistema de ecuaciones lineales con una matriz regular A_p para los términos independientes dados tiene la única solución y como los segundos miembros de la igualdad (3) se diferencian de los segundos miembros de las correspondientes igualdades (2) sólo por el factor $| A |$, tambien los primeros miem-

bros deben diferenciarse por el mismo factor, de donde se desprenden las igualdades requeridas (1).

973. **Indicación.** Aplicar el teorema de Laplace y el problema 903.

974. **Indicación.** Aplicar el teorema de Laplace y el problema 903.

975. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$. 976. $\begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda^3+\lambda^2-2\lambda-2 \end{pmatrix}$. 977. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2+5\lambda \end{pmatrix}$.

978. $\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 0 & (\lambda+1)(\lambda-1)^3 \end{pmatrix}$. 979. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

980. $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda^2 \end{pmatrix}$. 981. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^3 \end{pmatrix}$.

982. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+2\lambda^2+\lambda \end{pmatrix}$. 983. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda \end{pmatrix}$.

984. **Indicación.** Demostrar que los polinomios $D_k(\lambda)$ no varían durante las transformaciones elementales y que para la forma diagonal normal

$$D_k(\lambda)=\prod_{i=1}^{k} E_i(\lambda) \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

985. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) \end{pmatrix}$.

986. $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) \end{pmatrix}$.

987. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$, donde $p=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)$.

988. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p^2 \end{pmatrix}$, donde p es el producto de los polinomios a, b, c, d, dividido por el producto de los coeficientes mayores de esos polinomios.

989. $\begin{pmatrix} d(\lambda) & 0 \\ 0 & \dfrac{f(\lambda)\,g(\lambda)}{c\,d(\lambda)} \end{pmatrix}$, donde $d(\lambda)$ es el máximo común divisor de los polinomios $f(\lambda)$ y $g(\lambda)$ que tiene el coeficiente mayor igual a la unidad y c es el producto de los coeficientes mayores de esos polinomios.

990. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & fgh & 0 \\ 0 & 0 & fgh \end{pmatrix}$.

991. $\begin{pmatrix} abc & 0 & 0 \\ 0 & \frac{fgh}{abc} & 0 \\ 0 & 0 & fgh \end{pmatrix}$, donde a, b, c son respectivamente los máximos comunes divisores para g y h, f y h, f y g tomados con los coeficientes mayores iguales a la unidad.

992. $\begin{pmatrix} \frac{abc}{d} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d^2fgh}{abc} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{fgh}{d} \end{pmatrix}$ donde d es el máximo común divisor de f, g y h; a, b, c son respectivamente los máximos comunes divisores de g y h, f y h, f, y g, con la particularidad de que los coeficientes mayores de todos los polinomios a, b, c, d son iguales a la unidad.

993. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4 \end{pmatrix}$.

994. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$.

995. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}$, donde $f(\lambda) = \lambda^5 + 5\lambda^4 + 4\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1$.

996. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [(\lambda+\alpha)^2+\beta^2]^2 \end{pmatrix}$, si $\beta \neq 0$,

ó

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+\alpha)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda+\alpha)^2 \end{pmatrix}, \text{ si } \beta = 0.$$

997. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-3)^2 \end{pmatrix}$

998. $\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$

999. $\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda^n \end{pmatrix}$, donde n es el orden de la matriz dada.

1000. Son equivalentes. **1001.** No son equivalentes.

1002. Las matrices A y C son equivalentes entre sí, pero no son equivalentes a la matriz B.

1003. Es la matriz unidad.

1005. **Indicación.** Hacer uso de que la transformación elemental de las filas de la matriz A se reduce a la multiplicación de A a la izquierda (y a la derecha si se trata de las columnas) por una λ-matriz unimodular especial. Prosiguiendo, si $B = P_s P_{s-1} \dots P_1 A Q_1 Q_2 \dots Q_t$, donde P_i, Q_j son λ-matrices unimodulares especiales, poner $P = P_s P_{s-1} \dots P_1 E_m$ y $Q = E_n Q_1 Q_2 \dots Q_t$. Al demostrar la suficiencia, usar la respuesta del problema 1003.

1006. $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda^2-1\end{pmatrix}$; $\quad P=\begin{pmatrix}0 & 1/2\\ -2 & \lambda+3\end{pmatrix}$;

$$Q=\begin{pmatrix}\lambda & -\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{1}{2}\lambda-1\\ 1-\lambda & \frac{1}{2}\lambda^2-\lambda+\frac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

1007. $B=\begin{pmatrix}\lambda+2 & 0\\ 0 & \lambda^2+4\lambda+4\end{pmatrix}$; $\quad P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$;

$$Q=\begin{pmatrix}1 & -\lambda^2-2\lambda\\ -\lambda & \lambda^3+2\lambda^2+1\end{pmatrix}.$$

1008. $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda^3-\lambda^2\end{pmatrix}$; $\quad P=\begin{pmatrix}-2\lambda-3 & 0 & 2\lambda+4\\ -3 & -1 & 4\\ 3 & 0 & -\end{pmatrix}$;

$$Q=\begin{pmatrix}1 & -\lambda^3+\lambda^2-\lambda+1 & 0\\ \lambda & -\lambda^4+\lambda^3-\lambda^2+\lambda+1 & 0\\ -\lambda-1 & \lambda^4-2 & 1\end{pmatrix}.$$

1009. Por ejemplo, $P=\begin{pmatrix}-3\lambda^2+9\lambda+8 & 3\lambda^2-9\lambda+4\\ -2\lambda^2+6\lambda+5 & 2\lambda^2-6\lambda+3\end{pmatrix}$; $\; Q=\begin{pmatrix}1/2 & -1/4\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}$.

1010. Por ejemplo, $P=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $\; Q=\begin{pmatrix}-\lambda^2+\lambda+1 & -2\lambda^2+\lambda+2\\ \lambda-1 & 2\lambda-1\end{pmatrix}$.

1011. Por ejemplo,

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 11\lambda+8 & -11 & 0\\ 2\lambda-1 & -2 & 0\end{pmatrix};\quad Q=\begin{pmatrix}-2\lambda-1 & -\lambda-1 & -\lambda^2+\lambda\\ 2\lambda^2+\lambda+2 & \lambda^2+\lambda+1 & \lambda^3-\lambda^2-1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

1012. Por ejemplo,

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -3\lambda^3-2\lambda+1 & \lambda^2+\lambda & 1\\ -6\lambda^3-4\lambda+4 & 2\lambda^2+2\lambda-1 & 2\end{pmatrix};\quad Q=\begin{pmatrix}-\lambda+1 & -\lambda & -\lambda^2\\ -\lambda+2 & -\lambda+1 & -\lambda^2\\ \lambda-1 & \lambda & \lambda^2+1\end{pmatrix}.$$

1013. Por ejemplo, $P=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; $\quad Q=\begin{pmatrix}-3 & -5 & 0\\ 5 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

1014. Por ejemplo, $P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 4 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $Q=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$.

1015. $E_1(\lambda) = 1$; $E_2(\lambda) = \lambda - 1$; $E_3(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1)$.

1016. $E_1(\lambda) = \lambda + 1$; $E_2(\lambda) = \lambda^2 - 1$; $E_3(\lambda) = \lambda^3 - \lambda$.

1017. $E_1(\lambda) = \lambda^2 + 1$; $E_2(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1$; $E_3(\lambda) = E_4(\lambda) = 0$.

1018. $E_1(\lambda) = 1$; $E_2(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1$; $E_3(\lambda) = \lambda^3 + 1$; $E_4(\lambda) = 0$.

1019. $E_1(\lambda) = \ldots = E_n(\lambda) = 1$; $E_{n+1}(\lambda) = \lambda^{n+1}$.

1020. $E_1(\lambda) = \ldots = E_{n-1}(\lambda) = 1$; $E_n(\lambda) = (\lambda - \alpha)^n$, si $\beta \neq 0$, $E_1(\lambda) = \ldots = E_n(\lambda) = \lambda - \alpha$, si $\beta = 0$.

Indicación. Para $\beta \neq 0$ mostrar que el divisor de los menores $D_{n-1}(\lambda) = 1$. Para ello cerciorarse de que el menor que se obtiene borrando la primera columna y la última fila, no se anula cuando $\lambda = \alpha$.

1021. $\lambda + 1$, $(\lambda - 1)^2$. 1022. $\lambda + 1$, $\lambda - 1$, $\lambda - 1$.

1023. No existen divisores elementales.

1024. $\lambda + 1$, $(\lambda - 1)^2$, $\lambda - 1$, $\lambda + 2$, $\lambda + 2$, $\lambda + 2$.

1025. No existen divisores elementales.

1026. En el campo de los números racionales: $\lambda^2 + 1$, $\lambda^2 - 3$; en el campo de los números reales: $\lambda^2 + 1$, $\lambda + \sqrt{3}$, $\lambda - \sqrt{3}$; en el campo de los números complejos: $\lambda + i$, $\lambda - i$, $\lambda + \sqrt{3}$, $\lambda - \sqrt{3}$.

1027. En el campo de los números racionales: $\lambda^2 - 2$, $(\lambda^2 + 4)^2$, $\lambda^2 + 4$; en el campo de los números reales: $\lambda + \sqrt{2}$, $\lambda - \sqrt{2}$, $(\lambda^2 + 4)^2$, $\lambda^2 + 4$; en el campo de los números complejos: $\lambda + \sqrt{2}$, $\lambda - \sqrt{2}$, $(\lambda + 2i)^2 (\lambda - 2i)^2$ $\lambda + 2i$, $\lambda - 2i$.

1028. En el campo de los números racionales y en el campo de los números reales: $(\lambda - 1)^2$, $(\lambda + 1)^2$, $\lambda + 1$, $(\lambda^2 - \lambda + 1)^2$, $\lambda^2 - \lambda + 1$; en el campo de los números complejos: $(\lambda - 1)^2$, $(\lambda + 1)^2$, $\lambda + 1$, $\left(\lambda - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^2$, $\left(\lambda - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^2$, $\lambda - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, $\lambda - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$.

1029.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1030.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 + 2\lambda^2 - 4\lambda - 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^6 - 12\lambda^4 + 48\lambda^2 - 64 \end{pmatrix}$$

1031.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 + \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^5 + \lambda^4 - 5\lambda^3 - \lambda^2 + 8\lambda - 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1032. **Indicación.** Sean $e(\lambda)$ cierto factor irreductible que entra en la descomposición de por lo menos un elemento diagonal, s, la cantidad de elementos diagonales, distintos de cero, y $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_s$, el conjunto de exponentes de las potencias con las que $e(\lambda)$ se encuentra en esos elementos. Mostrar que para $k = 1, 2, \ldots, s$ el divisor de los menores $D_k(\lambda)$ se divide exactamente por $[e(\lambda)]^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k}$ y el factor invariante $E_k(\lambda)$, exactamente por $[e(\lambda)]^{\alpha_k}$.

1033. **Indicación.** Por medio de las transformaciones elementales reducir cada célula diagonal a la forma diagonal (por ejemplo, a la normal) y hacer uso del problema anterior.

1034. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda+1)^3(\lambda-1)^2 \end{pmatrix}.$$

1035. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^3-4\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3-4\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4-4\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

1036. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [f(\lambda)]^2 \end{pmatrix}, \text{ donde } f(\lambda)=\lambda^3+\lambda^2-6\lambda.$$

1037. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda^2-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda^2-1)^3 \end{pmatrix}$$

1038. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1039. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1040. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda-6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2+\lambda-6 \end{pmatrix}.$$

1041. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4-2\lambda^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1042. $D_1 = 1$, $D_2 = 2$, $D_3 = 4$, $D_4 = 320$.

1043. $D_1 = 3$, $D_2 = 18$, $D_3 = 324$, $D_4 = 11\,664$.

1045. **Indicación.** Para demostrar la existencia de la representación de dicha forma, hacer uso del problema anterior. Al demostrar la unicidad partiendo de las dos representaciones de la forma dada $A = P_1R_1 = P_2R_2$ deducir que la matriz $C = P_2^{-1}P_1 = R_2R_1^{-1}$ es una λ-matriz triangular y unimodular, cuyos elementos en la diagonal principal tienen el coeficiente mayor igual a la unidad, lo que significa que ellos mismos son iguales a la unidad. Luego, igualando los elementos de la k-ésima fila en la igualdad $CR_1 = R_2$ y tomando en consideración la condición para las potencias de los elementos R_1 y R_2, mostrar que todos los elementos de la matriz C por la derecha de la diagonal principal son nulos, o sea, C es una matriz unitaria. De aquí obtener la igualdad $P_1 = P_2$ y $R_1 = R_2$.

1047. Por ejemplo, $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1048. Matrices escalares. **Indicación.** Mostrar que si $AT = TA$ para cualquier matriz regular T, es justo para todas las matrices T. Para eso representar la matriz degenerada T como $T = (T - \alpha E) + \alpha E$, donde $\alpha \neq 0$ y se elige de modo que $| T - \alpha E | \neq 0$. Después aplicar el problema 818.

Observación. El método indicado puede resultar inútil para las matrices con elementos de un campo finito, en el cual puede no haber el elemento α con las

propiedades necesarias. El método que sirve para las matrices con elementos de cualquier campo y que no emplea el problema 818, consiste en lo siguiente: para $i \neq j$ designemos por F_{ij} la matriz que se diferencia de la unitaria sólo con que su elemento en la i-ésima fila y j-ésima columna es igual a la unidad. En la igualdad $AF_{ij} = F_{ij}A$ igualamos los elementos en la i-ésima fila y j-ésima columna y después en la i-ésima fila e i-ésima columna.

1049. En calidad de matriz T puede tomarse la obtenida de la unitaria, permutando las filas i-ésima y j-ésima.

1050. Indicación. Hacer uso del problema anterior.

1058. $$A=(B-\lambda E)\begin{pmatrix}2\lambda+1 & \lambda & 1\\ 3\lambda+2 & 3\lambda & 2\\ \lambda+2 & 2\lambda & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

1059. $$A=\begin{pmatrix}\lambda^2 & \lambda & 1\\ 2\lambda^2 & 3\lambda & 2\\ \lambda^2 & \lambda & -2\end{pmatrix}(B-\lambda E)+\begin{pmatrix}5 & -2 & 3\\ 6 & -3 & 2\\ 7 & -5 & 4\end{pmatrix}.$$

1060. Indicación. Emplear el problema 1005.

1061. Solución. Sean $P = (B - \lambda E) P_1 + P_0$ y $Q = Q_1 (B - \lambda E) + Q_0$. Utilizando estas relaciones, la igualdad

$$B - \lambda E = P (A - \lambda E) Q \tag{1}$$

puede reducirse a la forma

$$B - \lambda E - P_0 (A - \lambda E) Q_0 = P (A - \lambda E) Q_1 (B - \lambda E) + \\ + (B - \lambda E) P_1 (A - \lambda E) Q - (B - \lambda E) P_1 (A - \lambda E) Q_1 (B - \lambda E).$$

A partir de la igualdad (1), ponemos aquí

$$P (A - \lambda E) = (B - \lambda E) Q^{-1} \text{ y } (A - \lambda E) Q = P^{-1} (B - \lambda E)$$

obtenemos

$$B - \lambda E - P_0 (A - \lambda E) Q_0 = (B - \lambda E) [P_1P^{-1} + Q^{-1}Q_1 - \\ - P_1 (A - \lambda E) Q_1] (B - \lambda E).$$

La expresión en los corchetes en el segundo miembro de esta igualdad debe ser nula, ya que de lo contrario el segundo miembro tendría la potencia con respecto a λ no inferior a dos, mientras que la potencia del primer miembro no supera a la unidad. Por eso $B - \lambda E = P_0 (A - \lambda E) Q_0$. Igualando los coeficientes de λ y los términos independientes en la igualdad, obtenemos: $P_0Q = E$ y $B = P_0AQ_0$.

1063. Son semejantes.

1064. Son semejantes.

1065. Las matrices A y C son semejantes entre sí, pero no son semejantes a la matriz B.

1066. Las matrices B y C son semejantes entre sí, pero no son semejantes a la matriz A.

1067. Por ejemplo, $T=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$. **Indicación.** Con el fin de obtener una respuesta, en lo posible la más sencilla, es necesario tender a realizar las más simples transformaciones elementales de las columnas de las matrices $A - \lambda E$ y $B - \lambda E$.

1068. Por ejemplo, $T=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 10\end{pmatrix}$. **Indicación.** Para reducir la matriz $A - \lambda E$ a una forma diagonal normal, restar de la segunda fila, multiplicada por 6, la primera, multiplicada por $\lambda + 16$, y de la primera columna, multiplicada por 6, restar la segunda, multiplicada por $\lambda - 17$. Transformar de modo análogo la matriz $B - \lambda E$.

1069. Por ejemplo,

$$T=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

1070. Indicación. Obtener c_k como una suma de todos los factores que se hallan en el determinante $|A-\lambda E|$ en los productos según k elementos en la diagonal principal y tomados para $\lambda=0$.

1071. $\lambda_1=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$, $\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$. **Indicación.** Emplear el problema anterior.

1074. Indicación. Emplear el problema 1070 para la matriz $B=A-\lambda_0E$ y mostrar que el polinomio característico $|B-\mu E|$ de la matriz B después de sustituir $\mu=\lambda-\lambda_0$, pasa a ser un polinomio característico $|A-\lambda E|$ de la matriz A.

1075. Para la matriz triangular tipo

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_0 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n}\\ 0 & \lambda_0 & a_{23} & \ldots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & & \lambda_0\end{pmatrix},$$

donde $a_{i,\,i+1}\neq 0$ $(s=1,\,2,\,\ldots,\,n-1)$, será $d=1$. Para la matriz diagonal de orden n, en la cual p elementos de la diagonal principal son iguales a λ_0, será $d=p$.

1076. Indicación. Multiplicar las igualdades

$$|A^{-1}-\lambda E|=(-\lambda)^n\,|A^{-1}|\cdot\left|A-\frac{1}{\lambda}E\right|.$$

1077. Indicación. Multiplicar las igualdades

$$|A-\lambda E|=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\ldots(\lambda_n-\lambda),$$
$$|A+\lambda E|=(\lambda_1+\lambda)(\lambda_2+\lambda)\ldots(\lambda_n+\lambda)$$

y sustituir λ^2 por λ.

1078. Indicación. La igualdad $|A-\lambda E|=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\ldots(\lambda_n-\lambda)$ multiplicarla por todas las igualdades, obtenidas de ella, sustituyendo λ por $\lambda\varepsilon_1,\,\lambda\varepsilon_2,\,\ldots,\,\lambda\varepsilon_{p-1}$, donde $\varepsilon_k=\cos\frac{2\pi k}{p}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi k}{p}$ $(k=1,\,2,\,\ldots,\,p-1)$ y en la igualdad obtenida sustituir λ^p por λ.

1079. Solución. Sea $f(\lambda)=a_0\prod\limits_{j=1}^{s}(\lambda-\mu_j)$, además $\varphi(\lambda)=\prod\limits_{i=1}^{n}(\lambda_i-\lambda)$.

Suponiendo $\lambda=A$ en $f(\lambda)$, recibimos: $f(A_0)=a_0\prod\limits_{j=1}^{s}(A-\mu_jE)$. Pasando de las matrices a los determinantes, hallamos

$$|f(A)|=a_0^n\prod_{j=1}^{s}|A-\mu_jE|=a_0^n\prod_{j=1}^{s}\varphi(\mu_j)=a_0^n\prod_{j=1}^{s}\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i-\mu_j)=$$
$$=\prod_{i=1}^{n}\left[a_0\prod_{j=1}^{s}(\lambda_i-\mu_j)\right]=\prod_{i=1}^{n}f(\lambda_i).$$

Por otra parte, $|f(A)|=a_0^n\prod\limits_{j=1}^{s}\varphi(\mu_j)=R(f,\,\varphi)$.

1080. Indicación. Emplear la igualdad del problema anterior al polinomio $g(x) = f(x) - \lambda$, donde λ es un número arbitrario.

1081. Indicación. Emplear la igualdad $|f(A)| = \frac{|g(A)|}{|h(A)|}$ y utilizar los problemas 1079 y 1080.

1082. Indicación. Si por lo menos una de las matrices A, B es regular, la afirmación se desprende de la semejanza de las matrices AB y BA (véase el problema 1047). En el caso general pueden utilizarse los problemas 920 y 1070. Para las matrices sobre un campo con un número infinito (o lo suficientemente grande) de elementos de la ejecución de la igualdad requerida para las matrices regulares se deduce su ejecución idéntica. Por fin, para las matrices con elementos numéricos la igualdad para la matriz degenerada A puede obtenerse mediante un paso límite. Por ejemplo, si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son números característicos de la matriz degenerada A, tomamos una sucesión de números $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, tal que todos ellos sean distintos de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ y $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$. La matriz $A_k = A - \varepsilon_k E$ es regular. Por lo tanto, $|A_kB - \lambda E| = |BA_k - \lambda E|$. Pasando al límite para $k \to \infty$, obtenemos la igualdad necesaria.

1083. Los números característicos (teniendo en cuenta la multiplicidad) serán $\lambda_k = f(\varepsilon_k)$, donde $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots + a_nx^{n-1}$ y $\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi k}{n}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$.

Indicación. Utilizar la expresión para el circulante del problema 479 al circulante $|A - \lambda E|$, donde λ es un parámetro.

1084. Solución. Empleando el problema 304 para el determinante $|A - \lambda E|$, donde λ es un número característico, ponemos $\alpha + \beta = -\lambda$, $\lambda\beta = -1$. Entonces $|A - \lambda E| = \alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \ldots + \beta^n$. De $\alpha\beta = -1$, hallamos $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$. Prosiguiedo, $\alpha \neq \beta$, ya que de $\alpha = \beta$ y $|A - \lambda E| = 0$ seguiría que $\alpha = \beta = 0$. Por eso, $|A - \lambda E| = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} = 0$, de donde $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1} = 1$; $\frac{\alpha}{\beta} = \cos\frac{2\pi k}{n+1} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi k}{n+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. $k \neq 0$, ya que $\frac{\alpha}{\beta} \neq 1$. Resolviendo esta ecuación, junto con $\alpha\beta = -1$, hallamos: $\alpha = \pm i\left(\cos\frac{\pi k}{n+1} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi k}{n+1}\right)$, $\beta = \pm i\left(\cos\frac{\pi k}{n+1} - i\,\text{sen}\,\frac{\pi k}{n+1}\right)$. Aquí los signos $\pm$ tienen que coincidir para α y β, ya que $\alpha\beta = -1$. De aquí $\lambda = -(\alpha + \beta) = \mp 2i\cos\frac{\pi k}{n+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Todos estos números deben ser característicos. Pero entre ellos pueden haber iguales, ya que $\cos\frac{\pi k}{n+1} = -\cos\frac{(n+1-k)\pi}{n+1}$.

Todos los números diferentes se encuentran en el sistema

$$\lambda_k = 2i\cos\frac{\pi k}{n+1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Pero el grado del polinomio característico es igual a n. Esto significa que el último sistema contiene todos los números característicos, con la particularidad de que no hay raíces múltiples.

1085. Indicación. Demostrar que la célula de Jordan de orden k con el número α en la diagonal tiene el único divisor elemental $(\lambda - \alpha)^k$.

Construir la matriz de Jordan A_J, cuyas células de Jordan están enlazadas del modo indicado con los divisores elementales de la matriz $A - \lambda E$, y usando los problemas 1033 y 1061, demostrar que las matrices A y A_J son semejantes. Al demostrar la unicidad, haciendo uso del problema 1005, cerciorarse de que las matrices características de dos matrices de Jordan semejantes B y C son equivalentes, y del hecho que los divisores elementales de las matrices $B - \lambda E$ y $C - \lambda E$ coinciden, aplicando de nuevo el problema 1033, cerciorarse de que las matrices B y C coinciden con una exactitud de hasta el orden de las células.

1086. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. 1087. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1088. El problema está planteado incorrectamente. La matriz $A - \lambda E$ de cuarto orden no puede tener semejantes factores invariantes.

1090. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 1091. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 1092. $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1093. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 1094. $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. 1095. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1096. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 1097. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 1098. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1099. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 1100. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 1101. $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

1102. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix}$.

1103. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$, donde $\varepsilon = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i \sqrt{3}$ es uno de los valores complejos de $\sqrt[3]{1}$.

1104. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3i & 0 \\ 0 & 0 & 2-3i \end{pmatrix}$. 1105. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 1106. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1107. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 1108. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1109. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1110. Lo mismo que en el problema 1109.

1111. Lo mismo que en el problema 1109.

1112. $$\begin{pmatrix} n & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}.$$

1113. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

1114. $$\begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{n-1} \end{pmatrix},$$ donde $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ son todos los valores de $\sqrt[n]{\alpha^n}$, o sea, $\alpha_k = \alpha \left(\cos \frac{2\pi k}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi k}{n}\right)$ $(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$.

1115. Una célula de Jordan con el número α en la diagonal principal.

1118. En el campo de los números racionales es semejante a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1119. En el campo de los números reales es semejante a la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

1120. En el campo de los números complejos es semejante a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3i & 0 \\ 0 & 0 & 2-3i \end{pmatrix}.$$

1121. En ningún campo es semejante a la matriz diagonal.

1125. La matriz diagonal con los elementos en la diagonal principal, iguales a cero o a la unidad.

1126. La matriz diagonal con los elementos iguales a ± 1 en la diagonal principal.

Observación. La afirmación no es correcta para las matrices sobre un campo de característica dos. Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = E$ y la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ no se reducen a la diagonal en virtud de la unicidad de la forma de Jordan.

1127. Si n es el período de la matriz A, o sea, el menor de los números naturales k, para los cuales $A^k = E$, la matriz diagonal tiene en la diagonal principal algunos de los n valores de la raíz $\sqrt[n]{1}$. **Observación.** El resultado es inco-

recto; para las matrices sobre los campos de característica finita, por ejemplo, para la matriz de orden $\leqslant p$ sobre el campo de característica p:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

es válida la igualdad $A^p = E$.

1128. a) $\lambda - 1$; b) λ.

1129. Para las matrices escalares $A = \alpha E$ y sólo para éstas. Para el orden n dado esa matriz es única.

1130. $(\lambda - \alpha)^n$.

1134. $\lambda^2 - 4\lambda + 4$.

1135. $\lambda^2 - 5\lambda + 6$.

1136. Por ejemplo, para las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\varphi(\lambda) = (\lambda - 1)^4$, $\psi(\lambda) = (\lambda - 1)^2$, pero estas matrices no son semejantes en virtud de la unicidad de la forma de Jordan de cualquier matriz.

1137.

$$\begin{pmatrix} \alpha^k & C_k^1\alpha^{k-1} & C_k^2\alpha^{k-2} & C_k^3\alpha^{k-3} & \dots & C_k^{n-1}\alpha^{k-n+1} \\ 0 & \alpha^k & C_k^1\alpha^{k-1} & C_k^2\alpha^{k-2} & \dots & C_k^{n-2}\alpha^{k-n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha^k \end{pmatrix}$$

para $k \leqslant n-1$ hay que poner $C_k^0 = 1$ y $C_k^s = 0$ para $k < s$.

1138. Indicación. Poner $A = \alpha E + H$ y en la igualdad

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \dots + \frac{f^{(s)}(\alpha)}{s!}(x-\alpha)^s$$

(s es el grado del polinomio $f(x)$) tomar $x = A$.

1140. Una célula de Jordan con el número α^2 en la diagonal.

1141. Si $n > 1$ es el orden de la célula de Jordan A con el cero en la diagonal, la forma de Jordan de la matriz A^2 consta de dos células con cero en la diagonal que tienen órdenes $n/2$ siendo n par, y $(n - 1)/2$, $(n + 1)/2$ para n impar.

Indicación. Empleando el problema 1130, hallar los polinomios mínimos de las matrices A y A^2 y mostrar que las células de la forma de Jordan de la matriz A^2 tienen órdenes que no superan a $n/2$ para n par y $(n + 1)/2$ para n impar. Comprobar que el divisor de los menores $D_{n-2}(\lambda)$ de la matriz $A^2 - \lambda E$ es igual a la unidad, mostrando posteriormente que la forma de Jordan de la matriz A^2 no contiene más de dos células.

1143. La matriz buscada contiene dos células de Jordan con el número α en la diagonal. Éstas tienen órdenes $n/2$ para n par ó $(n - 1)/2$ y $(n + 1)/2$ para n impar. **Indicación.** Utilizar los dos problemas anteriores.

1144. Solución. Sea $A = TBT^{-1}$, donde A es la matriz dada y

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_k \end{pmatrix}$$

es su forma de Jordan con las células de Jordan

$$B_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Entonces $A' = T'^{-1}B'T'$. Sea

$$H_i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y tiene el mismo orden que B_i y

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & & & 0 \\ & H_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & H_k \end{pmatrix}.$$

Multiplicando directamente, hallamos: $B'_n = H_i^{-1}B_iH_i$ y por lo tanto, $B' = H^{-1}BH$. Por eso $A' = T'^{-1}H^{-1}BHT' = T'^{-1}H^{-1}T^{-1}ATHT' = C^{-1}AC$, donde $C = THT'$ es una matriz regular simétrica. Supongamos que $D = C^{-1}A$. Entonces $D' = A'C'^{-1} = C^{-1}ACC^{-1} = D$. De esta manera, la matriz D es también simétrica y $A = CD$.

1145. Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son los números característicos de la matriz A (teniendo en cuenta su multiplicidad), los números característicos de la matriz A_p (teniendo en cuenta también su multiplicidad) son iguales a los números $\lambda_{i_1}\lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_p}$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_p \leqslant n)$, es decir, a todos los productos posibles según p de los números característicos de la matriz A.

Indicación. Aclarar que al cambiar la numeración de las combinaciones según p de los números $1, 2, \dots, n$, la matriz A_p pasa a una matriz semejante a ella, utilizar el problema 970, pasar a la forma de Jordan A_j y emplear las propiedades de las matrices asociadas del problema 969.

1146. Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ son los números característicos de A y $\mu_1, \dots, \mu_q$ son los números característicos de B, los números característicos de $A \times B$ son iguales a $\lambda_i\mu_j$ $(i = 1, 2, \dots, p;\ j = 1, 2, \dots, q)$.

Solución. Supongamos que el producto de Kronecker $A \times B$ se determina mediante la disposición de $\alpha_i, \alpha_2, \dots, \alpha_{pq}$ pares de números (i, j) $(i = 1, 2, \dots, p;\ j = 1, 2, \dots, q)$. La transposición de α_i y α_j origina en la matriz $A \times B$ una permutación de las filas i-ésima y j-ésima y de las columnas i-ésima y j-ésima y, por lo consiguiente, transformará esta matriz en una semejante a ella (problema 1049). Puesto que cualquier permutación se reduce a una serie de transposiciones, los números característicos de todos los productos de Kronecker $A \times B$ coinciden entre sí, por eso puede examinarse, por ejemplo, el pro-

ducto directo derecho $A \times^{\cdot} B$ (problema 964). Supongamos que A es igual a $C^{-1}A_jC$ y $B = D^{-1}B_jD$, donde A_j y B_j son las matrices de Jordan. Aplicando la propiedad c) del problema 963 hallamos $A \times^{\cdot} B = C^{-1}A_jC \times^{\cdot} D^{-1}B_jD = (C^{-1} \times^{\cdot} D^{-1})(A_j \times^{\cdot} B_j)(C \times^{\cdot} D)$. Según la propiedad e) del problema 964, tenemos: $C^{-1} \times^{\cdot} D^{-1} = (C \times^{\cdot} D)^{-1}$. Esto significa que las matrices $A \times^{\cdot} B$ y $A_j \times^{\cdot} B_j$ son semejantes y sus números característicos coinciden. Pero $A_j \times^{\cdot} B_j$ es una matriz triangular con los elementos $\lambda_i\mu_j$ ($i = 1, 2, \ldots, p$; $j = 1, 2, \ldots, q$) en la diagonal principal, lo que demuestra nuestra afirmación.

1147. Indicación. Mostrar que $g(A) = h(A)$ cuando, y sólo cuando, $g(\lambda) - h(\lambda)$ se divide por $\psi(\lambda)$.

1149. En este caso el polinomio mínimo coincide con el característico (con una exactitud de hasta el signo). $r(\lambda)$ es un polinomio ordinario de interpolación de Lagrange general.

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) \frac{(A-\lambda_1E)\ldots(A-\lambda_{k-1}E)(A-\lambda_{k+1}E)\ldots(A-\lambda_nE)}{(\lambda_k-\lambda_1)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\ldots(\lambda_k-\lambda_n)}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los números característicos de la matriz A (diferentes según la condición).

1150. $r(\lambda)$ es un polinomio ordinario de interpolación de Lagrange general.

$$f(A) = \sum_{k=1}^{s} f(\lambda_k) \frac{(A-\lambda_1E)\ldots(A-\lambda_{k-1}E)(A-\lambda_{k+1}E)\ldots(A-\lambda_sE)}{(\lambda_k-\lambda_1)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\ldots(\lambda_k-\lambda_s)}.$$

1151. Solución. Mostremos, primero, que si el polinomio interpolador de Lagrange—Sylvester $r(\lambda)$ existe, se determina mediante las igualdades (1) y (2). Sea

$$\frac{r(\lambda)}{\psi(\lambda)} = \sum_{k=1}^{s} \left[\frac{\alpha_{k,1}}{(\lambda-\lambda_k)^{r_k}} + \ldots + \frac{\alpha_{k,r_k}}{(\lambda-\lambda_k)}\right] \qquad (3)$$

el desarrollo de una fracción en fracciones simples. Multiplicando esta igualdad por $\psi(\lambda)$, obtenemos la igualdad (1). Para establecer las igualdades (2), multipliquemos la igualdad (3) por $(\lambda-\lambda_k)^{r_k}$. Obtenemos

$$\frac{r(\lambda)}{\psi_k(\lambda)} = \alpha_{k,1} + \alpha_{k,2}(\lambda-\lambda_k) + \ldots + \alpha_{k,r_k}(\lambda-\lambda_k)^{r_k-1} + (\lambda-\lambda_k)^{r_k}\varphi(\lambda), \qquad (4)$$

donde $\varphi(\lambda)$ es una función racional que tiene sentido para $\lambda = \lambda_k$ junto con todas sus derivadas. Tomando de ambos miembros de la igualdad (4) la $(j-1)$-ésima derivada para $\lambda = \lambda_k$ y usando el hecho de que los valores de $r(\lambda)$ y $f(\lambda)$ en el espectro de la matriz coinciden, obtenemos de esta manera las igualdades (2). Segundo, mostremos que el polinomio $r(\lambda)$ definido mediante las igualdades (1) y (2), es un polinomio de interpolación de Lagrange—Sylvester para la función $f(\lambda)$ en el espectro de la matriz A. De la igualdad (1) se ve que el grado de $r(\lambda)$ es inferior al de $\psi(\lambda)$. Prosiguiendo, ponemos

$$\varphi_k(\lambda) = \alpha_{k,1} + \alpha_{k,2}(\lambda-\lambda_k) + \ldots + \alpha_{k,r_k}(\lambda-\lambda_k)^{r_k-1}.$$

De las igualdades (2) se deduce que para $\lambda = \lambda_k$ los valores de la función $\varphi_k(\lambda)$ y de sus derivadas de orden $j < r_k$ coinciden respectivamente con los valores de la función $\frac{f(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}$ y sus derivadas del mismo orden. Por eso

suponiendo que $\lambda=\lambda_k$ en la igualdad $r(\lambda)=\sum_{k=1}^{s}\varphi_k(\lambda)\psi_k(\lambda)$ y en las igualdades que se obtienen de ésta mediante la diferenciación j-múltiple $(j<r_k)^j$, obtenemos:

$$r^{(j)}(\lambda_k)=f^{(j)}(\lambda_k)\ (j=0,\ 1,\ \ldots,\ r_k-1;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ s),$$

es decir, los valores de $r(\lambda)$ y $f(\lambda)$ en el espectro de la matriz coinciden.

1152. $f(A)=[aE+b(A-\lambda_1E)(A-\lambda_2E)^3+[cE+d(A-\lambda_2E)+e(A-\lambda_2E)^2]\times$ $\times(A-\lambda_1E)^2$, donde $a=\frac{f(\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)^3}$, $b=-\frac{3}{(\lambda_1-\lambda_2)^4}f(\lambda_1)+\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^3}f'(\lambda_1)$, $c=\frac{f(\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}$, $d=-\frac{2}{(\lambda_2-\lambda_1)^3}f(\lambda_2)+\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}f'(\lambda_2)$, $e=\frac{3}{(\lambda_2-\lambda_1)}f(\lambda_2)-$ $-\frac{2}{(\lambda_2-\lambda_1)^3}f'(\lambda_2)+\frac{1}{2!}\ \frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}f''(\lambda_2)$.

1154. Indicación. Mostrar que los valores del polinomio de interpolación de Lagrange—Sylvester $r(\lambda)$ para $f(\lambda)$ en el espectro de la matriz A coinciden con los valores de $f(\lambda)$ en el espectro de cada célula A_k y emplear el problema 1147.

1155. $r(\lambda)=f(0)+f'(0)\lambda+\frac{f''(0)}{2!}\lambda^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\lambda^{n-1}$.

$$f(A)=\begin{pmatrix} f(0) & f'(0) & \frac{f''(0)}{2!} & \ldots & \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \\ 0 & f(0) & f'(0) & \ldots & \frac{f^{(n-2)}(0)}{(n-2)!} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & f(0) \end{pmatrix},$$

$f(A)$ tiene sentido para cualquier función $f(\lambda)$, para la cual se determinan los valores de $f(0)$, $f'(0)$, $\ldots$, $f^{(n-1)}(0)$.

1156. $r(\lambda)=f(\alpha)+f'(\alpha)(\lambda-\alpha)+$

$$+\frac{f''(\alpha)}{2!}(\lambda-\alpha)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\lambda-\alpha)^{n-1},$$

$$f(A)=\begin{pmatrix} f(\alpha) & f'(\alpha) & \frac{f''(\alpha)}{2!} & \ldots & \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1!} \\ 0 & f(\alpha) & f'(\alpha) & \ldots & \frac{f^{(n-2)}(\alpha)}{(n-2)!} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & f(\alpha) \end{pmatrix}.$$

$f(A)$ tiene sentido para cualquier función $f(\lambda)$, para la cual existen valores de $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$, $\ldots$, $f^{(n-1)}(\alpha)$.

1160. Indicación. Emplear el problema anterior.

1162. $\begin{pmatrix} 3\cdot2^{100}-2\cdot3^{100} & 2(3^{100}-2^{100}) \\ -3(3^{100}-2^{100}) & 3^{101}-2^{101} \end{pmatrix}$.

1163. $2^{50}\begin{pmatrix} -24 & 25 \\ -25 & 26 \end{pmatrix}$. **1164.** $\pm\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$.

1165. $\pm\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$. $\pm\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; en total son cuatro matrices.

1166. $\begin{pmatrix} 4e-3 & 2-2e \\ 6e-6 & 4-3e \end{pmatrix}$. 1167. $\begin{pmatrix} 2e^2 & -e^2 \\ e^2 & 0 \end{pmatrix}$.

1168. $\begin{pmatrix} 3e-1 & e & -3e+1 \\ 3e & e+3 & -3e-3 \\ 3e-1 & e+1 & -3e \end{pmatrix} = (e-2)A^2+A+E$.

1169. $\begin{pmatrix} 3 & -15 & 6 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$, si se toma el valor real del logaritmo.

La solución general tiene el aspecto:

$$\begin{pmatrix} 3+2\pi in & -15 & 6 \\ 1 & -5+2\pi in & 2 \\ 1 & -5 & 2+2\pi in \end{pmatrix},$$

donde $i=\sqrt{-1}$ y n es cualquier número entero.

1170. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1171. **Indicación.** Utilizar el probbema 1159.
1172. **Indicación.** Utilizar el problema 1159.
1173. $|e^A| = e^s$, donde $s = a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$ es la traza de la matriz A.
1174. **Indicación.** Utilizar el problema 1161.
1175. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$. 1176. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$. 1177. $y_1^2-y_2^2$.

1178. $y_1^2-y_2^2-y_3^2-y_4^2$. 1179. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

1180. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$; $x_1=y_1-\frac{1}{2}y_2+\frac{5}{6}y_3$, $x_2=\frac{1}{2}y_2-\frac{1}{6}y_3$, $x_3=\frac{1}{3}y_3$.

1181. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$; $x_1=\frac{1}{2}y_1+y_2$, $x_2=y_2+y_3$, $x_3=-y_2+y_3$.

1182. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$; $x_1=y_1-y_2-y_3$, $x_2=y_1+y_2-y_3$, $x_3=y_3$.

1183. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$; $x_1=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,y_1-\frac{5}{3}\sqrt{3}\,y_2+\frac{1}{3}\sqrt{3}\,y_3$, $x_2=-\frac{1}{3}\sqrt{3}\,y_2+\frac{1}{3}\sqrt{3}\,y_3$, $x_3=\frac{1}{3}\sqrt{3}\,y_2+\frac{1}{3}\sqrt{3}\,y_3$.

1184. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$; $x_1=-\frac{3}{4}y_1-\frac{1}{4}y_2+\frac{1}{6}\sqrt{3}\,y_3$, $x_2=-\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2$, $x_3=\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2$.

1185. $y_1^2-y_2^2$; $x_1=y_1-y_2-y_3$, $x_2=y_1+y_2-y_4$, $x_3=y_3$, $x_4=y_4$.

1186. $y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$; $x_1=\frac{1}{3}\sqrt{3}\,y_1-\frac{1}{15}\sqrt{15}\,y_2+\frac{2}{85}\sqrt{85}\,y_3-\frac{1}{629}y_4$, $x_2=\frac{1}{5}\sqrt{15}\,y_2-\frac{6}{85}\sqrt{85}\,y_3+\frac{3}{629}\sqrt{629}\,y_4$, $x_3=\frac{1}{17}\sqrt{85}\,y_3+\frac{6}{629}\sqrt{629}\,y_4$, $x_4=\frac{1}{37}\sqrt{629}\,y_4$.

1187. $2y_1^2+10y_2^2+190y_3^2$, $y_1=x_1-\frac{1}{2}x_2+x_3$, $y_2=\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{10}x_3$, $y_3=\frac{1}{10}x_3$.

1188. $3y_1^2-30y_2^2+530y_3^2$. $y_1=x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{2}x_3$, $y_2=\frac{1}{3}x_2-\frac{1}{20}x_3$, $y_3=\frac{1}{20}x_3$.

1189. $2y_1^2+6y_2^2-6y_3^2+2y_4^2$; $y_1=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2$, $y_2=\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{6}x_3$, $y_3=\frac{1}{6}x_3+\frac{1}{2}x_4$, $y_4=\frac{3}{2}x_4$.

1190. $x_1=y_1-3y_2-6y_3$; $x_2=y_2+3y_3$; $x_3=y_3$.

1191. $x_1=2\sqrt{2}\,y_1+\sqrt{2}\,y_2+5y_3$; $x_2=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,y_1+y_3$; $x_3=y_3$.

1192. $x_1=y_3$, $x_2=\sqrt{2}\,y_2+y_3$, $x_3=\sqrt{2}\,y_1-\frac{3}{2}\sqrt{2}\,y_2-\left(3+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)y_3$.

1193. y_1^2; $y_1=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$; $y_2=x_2$; $y_3=x_3$; $\ldots$; $y_{i-1}=x_{i-1}$; $y_i=x_i$; $y_{i+1}=x_{i+1}$; $\ldots$; $y_n=x_n$, si $a_i\neq 0$.

1194. $y_1^2+\frac{3}{4}y_2^2+\frac{4}{6}y_3^2+\frac{5}{8}y_4^2+\ldots+\frac{n+1}{2n}y_n^2$;

$$y_1=x_1+\frac{1}{2}(x_2+x_3+\ldots+x_n);$$
$$y_2=x_2+\frac{1}{3}(x_3+x_4+\ldots+x_n);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n=x_n.$$

1195. $y_1^2-y_2^2-y_3^2-\frac{3}{4}y_4^2-\frac{4}{6}y_5^2-\frac{5}{8}y_6^2-\ldots-\frac{n-1}{2(n-2)}y_n^2$;

$$y_1=\frac{1}{2}(x_1+x_2)+x_3+x_4+\ldots+x_n;$$
$$y_2=\frac{1}{2}(x_1-x_2);$$
$$y_3=x_3+\frac{1}{2}(x_4+x_5+\ldots+x_n);$$
$$y_4=x_4+\frac{1}{3}(x_5+x_6+\ldots+x_n);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n=x_n.$$

Indicación. Reducir este problema al anterior.

1196. Si n es par: $y_1^2-y_2^2+y_3^2-y_4^2+\ldots+y_{n-1}^2-y_n^2$;

$$y_i=\frac{x_i+x_{i+1}+x_{i+2}}{2}\quad (i=1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ n-3);$$
$$y_i=\frac{x_{i-1}-x_i+x_{i+1}}{2}\quad (i=2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ n-2);$$
$$y_{n-1}=\frac{x_{n-1}+x_n}{2},\qquad y_n=\frac{x_{n-1}-x_n}{2}.$$

Si n es impar: $y_1^2-y_2^2+y_3^2-y_4^2+\ldots+y_{n-2}^2-y_{n-1}^2$;

$$y_i=\frac{x_i+x_{i+1}+x_{i+2}}{2} \quad (i=1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ n-2);$$

$$y_i=\frac{x_{i-1}-x_i+x_{i+1}}{2} \quad (i=2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ n-1);$$

$$y_n=x_n.$$

1197. $\frac{n-1}{n}y_1^2+\frac{n-2}{n-1}y_2^2+\ldots+\frac{2}{3}y_{n-2}^2+\frac{1}{2}y_{n-1}^2$;

$$y_1=x_1-\frac{x_2+x_3+\ldots+x_n}{n-1};$$

$$y_2=x_2-\frac{x_3+x_4+\ldots+x_n}{n-2};$$

. . . .

$$y_{n-1}=x_{n-1}-x_n;$$

$$y_n=x_n.$$

Indicación. Representar la forma como $f_1=\frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{2}{n}\sum_{i<j}^{n}x_ix_j$ y aplicar el método de la inducción. El otro procedimiento consiste en lo siguiente: transformando $z_1=x_1-s$; $z_2=x_2-s$; $\ldots$; $z_{n-1}=x_{n-1}-s$; $z_n=x_n$ y sumando estas igualdades, reduzcamos la forma $\sum_{i=1}^{n}(x_i-s)^2$ al aspecto: $2\left(\sum_{i=1}^{n-1}z_i^2+\sum_{j<i}^{n-1}z_iz_j\right)$. Utilizando la respuesta del problema 1194, obtenemos $2y_1^2+\frac{3}{2}y_2^2+\frac{4}{3}y_3^2+\ldots+\frac{n}{n-1}y_{n-1}^2$. En este caso la relación entre las incógnitas nuevas y viejas resulta relativamente compleja.

1198. $(n-1)y_1^2-y_2^2-y_3^2-\ldots-y_n^2$;

$$y_1=\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n);$$

$$y_2=\frac{1}{2}(-x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n);$$

$$y_3=\frac{1}{2}(-x_1-x_2+x_3+\ldots+x_n);$$

. . . .

$$y_n=\frac{1}{2}(-x_1-x_2-\ldots-x_{n-1}+x_n).$$

La transformación inversa tiene el aspecto: $x_1=y_1-y_2$; $x_2=y_2-y_3$; $\ldots$; $x_{n-1}=y_{n-1}-y_n$; $x_n=y_1+y_n$.

Indicación. Emplear la transformación

$$z_1=x_1+x_2+\ldots+x_n;$$

$$z_2=x_2+x_3+\ldots+x_n;$$

. . . .

$$z_n=x_n.$$

1199. Indicación. La demostración es semejante a la de la ley de inercia.

1200. Indicación. Utilizar el problema anterior.

1201. Las formas f_1 y f_3 son equivalentes entre sí, pero no lo son a la forma f_2.

1202. Las formas f_2 y f_3 son equivalentes entre sí pero no lo son a la forma f_1.

1203. En el campo complejo $n+1$; en el real $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

1204. El rango es un número par, la signatura es nula.

1205. $\left[\frac{n-|s|}{2}\right]+1$, donde $[x]$ significa un número entero máximo que no supera a x.

1210. Indicación. Para demostrar la afirmación b) examinar la forma $f_\varepsilon = f + \varepsilon g$, donde $\varepsilon > 0$ y g es la suma de los cuadrados de las incógnitas. Al demostrar la necesidad, comprobar que $f_\varepsilon > 0$ y que para los correspondientes menores principales D y D_ε de las formas f y f_ε tiene lugar: $D = \lim_{\varepsilon \to 0} D_\varepsilon$. Al demostrar la suficiencia comprobar que desarrollando D_ε según las potencias de ε, $D_\varepsilon > 0$, y mostrar que para cualesquiera valores de las incógnitas se cumple $f = \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon$. **Ejemplos.** La forma $f_1 = -x_2^2$ o la forma regular $f_2 = -x_2^2 + 2x_1x_3$ tienen los menores angulares no negativos, pero ellos de por sí no son no negativos.

Al demostrar la afirmación c) aplicar el problema 1208.

Al demostrar la afirmación d), emplear el problema 916 y la reducción de f a la forma normal, mostrando que $A = D'BD = (BD)'(BD)$, donde D es la matriz de una transformación y B, la matriz de la forma en la forma normal.

1212. $\lambda > 2$. **1213.** $|\lambda| < \sqrt{5/3}$. **1214.** $-0{,}8 < \lambda < 0$.

1215. No existen los valores requeridos de λ.

1216. No existen los valores requeridos de λ.

1217. Indicación. Sea $g = f + l^2$, donde $l = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$. Cambiando el orden de las incógnitas, llegar al caso de $c_n \neq 0$, ejecutar la transformación $y_i = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, $y_n = \frac{l}{c_n}$ y demostrar que para las nuevas formas $D_{g_1} = D_{f_1} + c_n^2 D_{n-1}$, donde D_{n-1} es el menor angular de orden $n-1$ de la forma f_1.

1218. Indicación. Representar la forma f como

$$f = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + f_1(x_2, \ldots, x_n)$$

y utilizando el problema anterior, mostrar que $D_f = a_{11}D_{f_1} \leqslant a_{11}D_\varphi$.

1219. Indicación. Utilizar la forma canónica de la forma dada.

1220. Solución. Es obvio que $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$. Reduciendo ambas formas a la forma normal, hallaremos $f = \sum_{i=1}^{r} y_i^2$, $g = \sum_{j=1}^{s} z_j^2$, donde y_i, z_j son formas lineales con respecto a $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En virtud de las propiedades señaladas de la composición, tenemos:

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(y_i^2, z_j^2).$$

Examinemos uno de los sumandos (y^2, z^2), donde $y = \sum_{h=1}^{n} a_hx_h$, $z = \sum_{k=1}^{n} b_kx_k$. Entonces $y^2 = \sum_{h,l=1}^{n} a_ha_lx_hx_l$; $z^2 = \sum_{h,l=1}^{n} b_hb_lx_hx_l$; $(y^2, z^2) =$

$= \sum_{k, l=1}^{n} a_k a_l b_k b_l x_k x_l = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k x_k\right)^2 \geqslant 0$ para cualesquiera valores reales de $x_1, \ldots, x_n$. De aquí $(f, g) \geqslant 0$, lo que demuestra la afirmación a). Ahora sean $f > 0$ y $g > 0$. La forma g la reducimos a la normal:

$g = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$, donde $y_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_j$ $(i = 1, \ldots, n)$ y $|Q| = |q_{ij}| \neq 0$. Entonces $(f, g) = \sum_{i=1}^{n} (f, y_i^2)$. Pero $y_i^2 = \sum_{j, k=1}^{n} g_{ij} q_{ik} x_j x_k$, de donde $(f, y_i^2) =$

$= \sum_{j, k=1}^{n} a_{jk} q_{ij} q_{ik} x_j x_k = \sum_{j, k=1}^{n} a_{jk} (q_{ij} x_j)(q_{ik} x_k) \geqslant 0$ en virtud de que $f > 0$. Si para cierto t tomamos el valor $x_t \neq 0$, existe un i tal que $q_{it} \neq 0$ (sino sería en la raya vertical $Q = 0$). Por consiguiente, en virtud de que

$f > 0$, también $(f, y_i^2) = \sum_{j, k=1}^{n} a_{jk} (q_{ij} x_j)(q_{ik} x_k) > 0$ y $(f, g) > 0$.

1221. Indicación. Para demostrar la afirmación b) examinar la forma

$f_k = \sum_{i, j=1}^{k} a_{ij} x_i x_j \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$

1222. Indicación. La necesidad de las condiciones (2) proviene de la constancia de los menores angulares para las transformaciones triangulares (véase el problema anterior).

De la misma manera se demuestran las igualdades (3). La suficiencia puede demostrarse mediante la inducción según la cantidad de las indeterminadas n.

1224. $f_1 = +2y_1^2 + \frac{2}{3} y_2^2$; $g_1 = y_1^2 + y_2^2$, $x_1 = y_1 + \frac{1}{3} \sqrt{3}\, y_2$; $x_2 = \frac{1}{2} y_1 - \frac{1}{6} \sqrt{3}\, y_2$.

1225. $f_1 = y_1^2 + y_2^2$; $g_1 = 4y_1^2 - 2y_2^2$; $x_1 = -2\sqrt{2}\, y_1 + 3\sqrt{2}\, y_2$; $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, y_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

1226. $f_1 = 9y_1^2 + 9y_2^2 - 9y_3^2$; $g_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$; $x_1 = \sqrt{2}\, y_2$; $x_2 = \frac{1}{6} y_1 - \frac{1}{3}\sqrt{2}\, y_3$; $x_3 = \frac{2}{3} y_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\, y_2 + \frac{1}{6}\sqrt{2}\, y_3$.

1227. $f_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2$; $g_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$; $x_1 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$; $x_2 = y_2 - y_4$; $x_3 = \frac{1}{2} y_1 - \frac{1}{2} y_2 + \frac{1}{2} y_3 - \frac{1}{2} y_4$; $x_4 = \frac{1}{2} y_1 - \frac{1}{2} y_2 - \frac{1}{2} y_3 - \frac{2}{2} y_4$.

1228. $f_1 = y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 - 7y_4^2$; $g_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$; $x_1 = \frac{2}{3} y_2 + \frac{2}{3} y_3 + \frac{1}{3} y_4$; $x_2 = \frac{2}{3} y_2 - \frac{4}{3} y_3 + \frac{4}{3} y_4$; $x_3 = y_3 - 2y_4$; $x_4 = y_1$.

1229. $f_1 = y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2$; $g_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$; $x_1 = y_1 - y_2$; $x_2 = -y_2 + y_3$; $x_3 = -3y_2 + 2y_3$.

1230. Indicación. Mostrar que las raíces de la λ-ecuación de un par de formas no varían para cualquier transformación lineal regular de las incógnitas.

1231. No se puede, ya que las raíces de la λ-ecuación son $1 \pm \frac{1}{2} i$.

1232. No se puede, ya que las raíces de la λ-ecuación son $\pm \frac{1}{2} i \sqrt{5}$.

1233. Para una numeración adecuada se cumple: $\lambda_i \mu_i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

1234. $3y_1^2 - y_2^2 - 5y_3^2$. **1235.** $5y_1^2 - y_2^2 - 2y_3^2$.

1237. Son equivalentes. **1238.** Son equivalentes.

1239. $x_1 = 12y_1 - 17y_2$; $x_2 = 5y_1 + 7y_2$.

1240. $x_1 = y_1 + 2y_2$; $x_2 = 3y_1 + 2y_2$.

1242. Indicación. Mostrar que el polinomio característico $|A - \lambda E|$ no varía durante la transformación ortogonal de la forma f.

1243. $4y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2$; **1244.** $6y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$.

1245. $y_1^2 + \sqrt{3}\, y_2^2 - \sqrt{3}\, y_3^2$. **1246.** $3y_1^2 + (1 + \sqrt{17})\, y_2^2 + (1 - \sqrt{17})\, y_3^2$.

1247. $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos \frac{\pi k}{n+1}\, y_k^2$. **Indicación.** Examinar la forma duplicada y resolver de modo análogo el problema 1084.

1248. $3y_1^2 + 6y_2^2 - 9y_3^2$; $x_1 = \frac{2}{3} y_1 - \frac{1}{3} y_2 + \frac{2}{3} y_3$; $x_2 = \frac{2}{3} y_1 + \frac{2}{3} y_2 - \frac{1}{3} y_3$; $x_3 = -\frac{1}{3} y_1 + \frac{2}{3} y_2 + \frac{2}{3} y_3$.

1249. $9y_1^2 + 18y_2^2 - 9y_3^2$; $x_1 = \frac{2}{3} y_1 + \frac{2}{3} y_2 - \frac{1}{3} y_3$; $x_2 = -\frac{1}{3} y_1 + \frac{2}{3} y_2 + \frac{2}{3} y_3$; $x_3 = \frac{2}{3} y_1 - \frac{1}{3} y_2 + \frac{2}{3} y_3$.

1250. $3y_1^2 + 6y_2^2 - 2y_3^2$; $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_3$; $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_3$; $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}} y_2$.

1251. $5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$; $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_3$; $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_3$; $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}} y_2$.

1252. $9y_1^2 + 18y_2^2 + 18y_3^2$; $x_1 = \frac{1}{3} y_1 - \frac{2}{3} y_2 + \frac{2}{3} y_3$; $x_2 = \frac{2}{3} y_1 - \frac{1}{3} y_2 - \frac{2}{3} y_3$; $x_3 = \frac{2}{3} y_1 + \frac{2}{3} y_2 + \frac{1}{3} y_3$.

1253. $3y_1^2 - 6y_2^2$; $x_1 = \frac{2}{3} y_1 + \frac{1}{6} \sqrt{2}\, y_2 + \frac{1}{2} \sqrt{2}\, y_3$; $x_2 = \frac{1}{3} y_1 - \frac{2}{3} \sqrt{2}\, y_2$; $x_3 = \frac{2}{3} y_1 + \frac{1}{6} \sqrt{2}\, y_2 - \frac{1}{2} \sqrt{2}\, y_3$.

1254. $9y_1^2 + 9y_2^2 - 9y_3^2$; $x_1 = \frac{2}{3} y_1 + \frac{1}{2} \sqrt{2}\, y_2 + \frac{1}{6} \sqrt{2}\, y_3$; $x_2 = \frac{1}{3} y_1 - \frac{2}{3} \sqrt{2}\, y_3$; $x_3 = \frac{2}{3} y_1 - \frac{1}{2} \sqrt{2}\, y_2 + \frac{1}{6} \sqrt{2}\, y_3$.

1255. $2y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2 - 4y_4^2$; $x_1 = \frac{1}{2} (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$; $x_2 = \frac{1}{2} (-y_1 + y_2 +$

$+y_3-y_4)$; $x_3=\frac{1}{2}(-y_1-y_2+y_3+y_4)$; $x_4=\frac{1}{2}(y_1-y_2+y_3-y_4)$.

1256. $4y_1^2+8y_2^2+12y_3^2-4y_4^2$; $x_1=\frac{1}{2}(y_1+y_2+y_3+y_4)$; $x_2=\frac{1}{2}(y_1-y_2-$ $-y_3+y_4)$; $x_3=\frac{1}{2}(y_1+y_2-y_3-y_4)$; $x_4=\frac{1}{2}(y_1-y_2+y_3-y_4)$.

1257. $5y_1^2-5y_2^2+5y_3^2$; $x_1=\frac{1}{5}\sqrt{5}(2y_1+y_2)$; $x_2=\frac{1}{5}\sqrt{5}(y_1-2y_2)$; $x_3=$ $=\frac{1}{5}\sqrt{5}(2y_3+y_4)$; $x_4=\frac{1}{5}\sqrt{5}(-y_3+2y_4)$.

1258. $2y_1^2-4y_2^2$; $x_1=\frac{1}{2}\sqrt{2}(y_1+y_3)$; $x_2=\frac{1}{2}\sqrt{2}(y_1-y_3)$; $x_3=\frac{1}{2}\sqrt{2}\times$ $\times(y_2+y_4)$; $x_4=\frac{1}{2}\sqrt{2}(y_2-y_4)$.

1259. $9y_1^2+9y_2^2+9y_3^2$; $x_1=y_1$; $x_2=\frac{1}{3}(y_2+2y_3+2y_4)$; $x_3=\frac{1}{3}(2y_2+y_3-$ $-2y_4)$; $x_4=\frac{1}{3}(2y_2-2y_3+y_4)$.

1260. $5y_1^2+5y_2^2+5y_3^2-8y_4^2$; $x_1=\frac{1}{5}\sqrt{5}(2y_1+y_5)$; $x_2=\frac{1}{5}\sqrt{5}(-y_1+2y_5)$; $x_3=y_3$; $x_4=\frac{1}{13}\sqrt{13}(2y_2+3y_4)$; $x_5=\frac{1}{13}\sqrt{13}(3y_2-2y_4)$.

1261. $4y_1^2+4y_2^2+4y_3^2-6y_4^2-6y_5^2$; $x_1=y_1$; $x_2=\frac{1}{5}\sqrt{5}(y_2+2y_4)$; $x_3=$ $=\frac{1}{5}\sqrt{5}(-2y_2+y_4)$; $x_4=\frac{1}{10}\sqrt{10}(y_3+3y_5)$; $x_5=\frac{1}{10}\sqrt{10}(3y_3-y_5)$.

1262. $5y_1^2-5y_2^2+5y_3^2-5y_4^2+5y_5^2$; $x_1=\frac{1}{5}\sqrt{5}(2y_1+y_2)$; $x_2=\frac{1}{5}\sqrt{5}(y_1-$ $-2y_2)$; $x_3=\frac{1}{10}\sqrt{10}(3y_3+y_4)$; $x_4=\frac{1}{10}\sqrt{10}(-y_3+3y_4)$; $x_5=\frac{1}{5}\sqrt{5}(2y_5+y_6)$; $x_6\frac{1}{5}\sqrt{5}(y_5-2y_6)$.

1263. $\frac{n+1}{2}y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2+\ldots+\frac{1}{2}y_n^2$; $y_1=\frac{1}{\sqrt{n}}(x_1+x_2+\ldots+x_n)$; $y_i=\frac{1}{\sqrt{i(i-1)}}[x_1+x_2+\ldots+x_{i-1}-(i-1)x_i]$ $(i=2, 3, \ldots, n)$.

1264. $\frac{n-1}{2}y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2-\frac{1}{2}y_3^2-\ldots-\frac{1}{2}y_n^2$; puede tomarse la misma transformación que en el problema anterior.

1265. **Indicación.** Mostrar que durante la transformación ortogonal de la forma cuadrática, el polinomio característico de su matriz no varía.

1266. Las formas f y h son ortogonalmente equivalentes entre sí, pero no lo son con respecto a la forma g.

1269. $Q=\begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

1270. $Q = \begin{vmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ \frac{2}{15}\sqrt{5} & -\frac{1}{3}\sqrt{5} & -\frac{4}{15}\sqrt{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}$; 1271. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

1271. Indicación. Haciendo uso de la indicación del problema 1074, mostrar que los números característicos de la matriz $A - \lambda_0 E$ se obtienen, restando λ_0 de los números característicos de la matriz A y emplear el problema 1242.

1272. Indicación. Emplear el problema anterior.

1274. La matriz cuadrada real con menores angulares positivos es ortogonal cuando, y sólo cuando, es unitaria.

1275. Solución. La forma cuadrática f con la matriz $A'A$ es definida positiva (problema 1207); por lo tanto, puede reducirse mediante una transformación triangular, a la forma canónica con coeficientes positivos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (problema 1222). Si C es la matriz de esta transformación, D, la matriz diagonal con los elementos $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$ en la diagonal (con la particularidad de que todos los valores de las raíces se toman positivos) y $B = DC$, $A'A = C'D^2C = B'B$, donde la matriz B satisface las exigencias del problema. Pongamos $Q = AB^{-1}$. Entonces $Q'Q = (AB^{-1})' \cdot (AB^{-1}) = (B')^{-1} \times (A'A) \cdot B^{-1} = (B')^{-1} \cdot B'B \cdot B^{-1} = E$, es decir, la matriz Q es ortogonal y $A = QB$; si además $A = Q_1B_1$, la matriz $Q^{-1}Q_1 = BB_1^{-1}$ es ortogonal y triangular con elementos positivos en la diagonal. Esto significa que es una matriz unitaria, de donde $Q = Q_1$ y $B = B_1$.

1276. Solución. Demostremos la afirmación a) para la representación $A = QB$ del tipo necesario. La matriz $A'A$ es simétrica y la forma cuadrática con esta matriz es definida positiva (problema 1207). Por eso existe una matriz ortogonal P tal que $A'A = P'CP$, donde C es una matriz diagonal con elementos positos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ en la diagonal. Sea D una matriz diagonal con elementos $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$ en la diagonal, con la particularidad de que se toman los valores positivos de la raíz. Pongamos $B = P'DP = P^{-1}DP$. De aquí proviene que B es una matriz simétrica con números característicos positivos. Esto significa que la forma cuadrática con la matriz B es definida positiva y sus menores angulares son positivos. Prosiguiendo, $A'A = P^{-1}CP = P^{-1}D^2P = P^{-1}DP \cdot P^{-1}DP = B^2$. Supongamos que $Q = AB^{-1}$. Entonces $A = QB$ y $Q'Q = (AB^{-1})' \cdot (AB^{-1}) = B'^{-1}(A'A) \cdot B^{-1} = B^{-1}B^2 \cdot B^{-1} = E$. Por lo tanto, la matriz Q es ortogonal.

Supongamos que se dan dos representaciones del tipo necesario: $A = Q_1B_1 = Q_2B_2$. En este caso $A'A = B_1^2 = B_2^2$. Designemos por $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$; $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$; $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ los números característicos para $A'A$, B_1, B_2, respectivamente, situados en orden no creciente. Todos esos números son positivos y $\mu_i^2 = \lambda_i = \nu_i^2$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (problema 1077). Esto significa que $\mu_i = \nu_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Sean C y D matrices diagonales con elementos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ y $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ en la diagonal. Existen matrices ortogonales U y V tales que $B_1 = U'DU$, $B_2 = V'DV$. Por lo tanto, $B_1^2 = U'CU$, $B_2^2 = V'CV$, de donde $U'CU = V'CV$, $CUV' = UV'C$. La matriz $W = (w_{ij})_1^n = UV'$ es conmutable con C. Mostremos que también es conmutable con D. Si $\lambda_i \neq \lambda_j$, hallamos, calculando el elemento de la matriz $CW = WC$ en la i-ésima fila y j-ésima columna, que $w_{ij} = 0$. De esta manera, si la matriz C se representa como una matriz celular-diagonal con las células diagonales $C_1, C_2, \ldots, C_k$ de modo que en cada célula los elementos diagonales sean iguales y en distintas células, diferentes, la matriz W es celular-diagonal con células diagonales $W_1, W_2, \ldots, W_k$ de los mismos órdenes que $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Según la construcción de la matriz D, ella será también celular-diagonal con células diagonales $D_1, D_2, \ldots, D_k$ de los mismos órdenes e igual a los elementos diagonales en cada célula. Ya que $D_iW_i = W_iD_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, $DW = WD$. De aquí $DUV' = UV'D$; $U'DU = V'DV$, o sea, $B_1 = B_2$.

Haciendo uso de las funciones con respecto a las matrices, puede hacerse una demostración más corta. Si $A = QB$ es la representación del tipo buscado, $A'A = B^2$; $B = \sqrt{A'A}$, con la particularidad de que los números característicos de B son positivos. Así, pues, B es un valor de la función $\sqrt{\lambda}$ (en la que se toma el valor aritmético de la raíz) para $\lambda = A'A$. Puesto que los números característicos de la matriz $A'A$ son positivos, este valor tiene sentido, se determina unívocamente y como polinomio respecto a la matriz simétrica $A'A$, será una matriz simétrica (problemas 1148, 1151). Suponiendo que $Q = AB^{-1}$, nos cercioraremos, como más arriba, que Q es ortogonal.

La representación $A = B_2Q_2$ se obtiene de modo análogo con ayuda de la matriz AA'. La afirmación b) se demuestra de la misma manera que a), sustituyendo las formas definidas positivas por las formas definidas positivas hermitianas. La afirmación c) se desprende de la unicidad de las representaciones, indicadas en a) y b). Puede demostrarse también, reduciendo la matriz B en el caso 1) y la matriz A en el caso 2) a la forma diagonal mediante una matriz ortogonal (unitaria) (véase el problema 1595). Entonces de la afirmación 1) se deduce fácilmente la unicidad de las representaciones, indicadas en a) y b).

Parte IV. Espacios vectoriales y sus transformaciones lineales

1277. (1, 2, 3). **1278.** (1, 1, 1). **1279.** (0, 2, 1, 2).

1280. $x_1 = -27x'_1 - 71x'_2 - 41x'_3$; $x_2 = 9x'_1 + 20x'_2 + 9x'_3$; $x_3 = 4x'_1 + 12x'_2 + 8x'_3$.

1281. $x_1 = 2x'_1 - x'_3 - x'_4$; $x_2 = -3x'_1 + x'_2 - 2x'_3 + x'_4$; $x_3 = x'_1 - 2x'_2 + 2x'_3 - x'_4$; $x_4 = x'_1 - x'_2 + x'_3 - x'_4$.

1282. a) $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$; b) $f(\alpha), f'(\alpha), \frac{f''(\alpha)}{2!}, \ldots, \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$.

1283. $$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \alpha^2 & -\alpha^3 & \ldots & (-1)^n\alpha^n \\ 0 & 1 & -2\alpha & 3\alpha^2 & \ldots & (-1)^{n-1}n\alpha^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

En esta matriz en la $(k+1)$-ésima columna se encuentran los números $(-\alpha)^k$, $C_k^{k-1}(-\alpha)^{k-1}$, $C_k^{k-2}(-\alpha)^{k-2}$, $\ldots$, $C_k^1(-\alpha)$, 1, 0, 0, $\ldots$, 0.

1284. a) Dos filas cambian de sitio; b) dos columnas cambian de sitio; c) ocurrirá una reflexión simétrica de la matriz con respecto a su centro.

1285. No lo es. **1286.** No lo es. **1287.** Es, si la recta dada pasa a través del origen de coordenadas, en caso contrario no lo es. **1288.** Es. **1289.** No lo es. **1290.** No lo es. **1291.** Es. **1292.** No lo es. **1293.** Es.

1294. Todo el espacio; los vectores, yacentes en cualquier plano que pasa por el origen de coordenadas; los vectores, yacentes en cualquier recta que pasa a través del origen de coordenadas y el mismo origen de coordenadas, o sea, el vector nulo.

1295. Es incorrecto.

1297. La base la forman, por ejemplo, los vectores (1, 0, 0, $\ldots$, 0, 1), (0, 1, 0, $\ldots$, 0, 0), (0, 0, 1, $\ldots$, 0, 0), $\ldots$, (0, 0, 0, $\ldots$, 1, 0). La dimensión es igual a $n - 1$.

1298. La base la forman los siguientes vectores: si k es el número del vector básico, su coordenada con el número $2k - 1$ es igual a la unidad y las demás serán nulas, $k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n+1}{2}\right]$, donde $[x]$ significa el número entero máximo que no supera x. La dimensión es igual a $+\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

1299. La base la forman los vectores, indicados en el problema anterior como vectores básicos, añadiendo otro vector más, cuyas coordenadas con números pares son iguales a la unidad y con los impares, a cero. La dimensión es igual a $1+\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

1300. La base la forman los vectores $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ y $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$. La dimensión es igual a dos.

1301. La base la forman, por ejemplo, las matrices E_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, donde E_{ij} es la matriz, cuyo elemento en la i-ésima fila y j-ésima columna es igual a la unidad y todos los demás elementos son nulos. La dimensión es igual a n^2.

1302. La base la forman, por ejemplo, los polinomios: $1, x, x^2, \ldots, x^n$. La dimensión es igual a $n+1$.

1303. La base la forman, por ejemplo, las matrices F_{ij} $(i \leqslant j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n)$, donde F_{ij} es la matriz, cuyos elementos $f_{ij} = f_{ji} = 1$, y todos los demás son nulos. La dimensión es igual a $\frac{n(n+1)}{2}$.

1304. La base la forman, por ejemplo, las matrices G_{ij} $(i < j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n)$, donde G_{ij} es una matriz, cuyos elementos $g_{ij} = 1$, $g_{ji} = -1$, y todos los demás son nulos. La dimensión es igual a $\frac{n(n-1)}{2}$.

1308. La base la forman, por ejemplo, los vectores $(1, 0, 0, \ldots, 0, -1)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0, -1)$, $\ldots$, $(0, 0, 0, \ldots, 1, -1)$. La dimensión es igual a $n-1$.

1310. La dimensión es igual a tres. La base la forman, por ejemplo, los vectores a_1, a_2, a_4.

1311. La dimensión es igual a tres. La base la forman, por ejemplo, los vectores a_1, a_2, a_5.

1312. Por ejemplo, $x_1 - x_3 - x_4 = 0$, $x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

1313. Por ejemplo, $x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$, $x_1 - x_2 + 2x_4 = 0$, $2x_1 + x_2 - x_5 = 0$.

1317. $s = 3$, $d = 1$. 1318. $s = 3$, $d = 2$.

1319. **Solución.** La regla 1) se demuestra fácilmente. Demostremos la regla 2). Puesto que los números $x_{i1}, \ldots, x_{ik}; y_{i1}, \ldots, y_{il}$ satisface la igualdad (1), $c_i = \sum_{j=1}^{l} y_{ij}b_j = \sum_{j=1}^{k} x_{ij}a_j$. Por eso los vectores c_i $(i = 1, 2, \ldots, d)$ pertenecen tanto a L_1, como a L_2, lo que significa que pertenece también a su intersección D. Sea x cualquier vector de D. Este se expresa tanto por medio de la base de L_1, como también mediante la base de L_2. Por lo tanto, $x = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k = \beta_1 b_1 + \ldots + \beta_l b_l$. Esto significa que la fila de los números $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l$ es la solución del sistema de ecuaciones (1) y por eso se expresa linealmente por medio del sistema fundamental de soluciones (2). Sean $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$ los coeficientes de esta expresión. Entonces $\beta_j = \sum_{i=1}^{d} \gamma_i y_{ij}$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$, de donde

$$x = \sum_{j=1}^{l} \beta_j b_j = \sum_{j=1}^{l} \left(\sum_{i=1}^{d} \gamma_i y_{ij}\right) b_j = \sum_{i=1}^{d} \gamma_i \left(\sum_{j=1}^{l} y_{ij} b_j\right) = \sum_{i=1}^{d} \gamma_i c_i.$$

Así, pues, cualquier vector $x \in D$ se expresa linealmente mediante los vectores (4). Por fin, el sistema (4) es linealmente independiente ya que la matriz de las coordenadas de estos vectores en la base $b_1, \ldots, b_l$ contiene el menor (3) de orden d, distinto de cero.

1320. La base de la suma la forman, por ejemplo, los vectores a_1, a_2, b_1. La base de la intersección consta de un vector $c = 2a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = (3, 5, 1)$.

1321. La base de la suma la forman, por ejemplo, los vectores a_1, a_2, a_3, b_2. La base de la intersección la forman, por ejemplo, $b_1 = -2a_1 + a_2 + a_3$, $b_3 = 5a_1 - a_2 - 2a_3$.

1322. La base de la suma consta, por ejemplo, de los vectores a_1, a_2, a_3, b_1. La base de la intersección se compone, por ejemplo, de los vectores $c_1 = a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 = (1, 2, 2, 1)$; $c_2 = 2a_1 + 2a_3 = b_1 + b_3 = (2, 2, 2, 2)$.

1328. La proyección del vector e_i sobre L_1 paralelamente a L_2 tiene la i-ésima coordenada $\frac{n-1}{n}$ y las demás son $\frac{-1}{n}$, la proyección sobre L_2, paralelamente a L_1 tiene todas las coordenadas iguales a $1/n$.

1329. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \dots & 1/2 \\ 1/2 & 1 & \dots & 1/2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1/2 & 1/2 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & \dots & 1/2 \\ -1/2 & 0 & \dots & 1/2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1/2 & -1/2 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

1334. Indicación. Examinar las ecuaciones paramétricas de las rectas $x = a_0 + a_1t$, $x = b_0 + b_1t$, donde a_0, a_1, b_0, b_1 son los vectores dados.

1335. Los vectores $a_0 - b_0$, a_1, b_1 deben ser linealmente dependientes.

1336. Las condiciones buscadas consisten en que los vectores a_1 y b_1 son linealmente independientes y el vector $a_0 - b_0$ se expresa linealmente a través de a_1 y b_1. Si $a_0 - b_0 = t_1a_1 + t_2b_1$, el punto de intersección se da mediante el vector $a_0 - t_1a_1 = b_0 + t_2b_1$.

1337. $(-2, -5, -1, 1, -1)$. **1338.** $(0, 1, -1, -2, -3)$.

1339. Las condiciones necesarias y suficientes consisten en que los cuatro vectores $a_0 - c$, $b_0 - c$, a_1, b_1 son linealmente dependientes, y cada uno de los dos tríos $a_0 - c$, a_1, b_1 y $b_0 - c$, a_1, b_1 es linealmente independiente. La recta buscada tiene la ecuación $x = c + dt$, donde $d = \lambda_1 (a_0 - c) + \lambda_2 a_1 = \lambda_3 (b_0 - c) + \lambda_4 b_1$, con la particularidad de que los coeficientes λ_1 y λ_3 son distintos de cero.

Los puntos de intersección de esta recta con las rectas dadas tienen el aspecto

$$a_0 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} a_1 = c + \frac{1}{\lambda_1} d \quad \text{y} \quad b_0 + \frac{\lambda_4}{\lambda_3} b_1 = c + \frac{1}{\lambda_3} d.$$

1340. $x = c + dt$, donde $d = (6, 7, -8, -11)$; $M_1 (2, 2, -3, -4)$, $M_2 (-4, -5, 5, 7)$.

1341. $x = c + dt$, donde $d = (1, 1, 0, 3)$; $M_1 (2, 3, 2, 1)$, $M_2 (1, 2, 2, -2)$.

1344. Si dos planos de un espacio tridimensional tienen un punto común, tienen también una recta común. Si el plano y la variedad lineal tridimensional de un espacio cuadridimensional tienen un punto común, tienen también una recta común. Si dos variedades lineales tridimensionales de un espacio cuadridimensional poseen un punto común, tienen también un plano común.

1345. Para comodidad de clasificación de diferentes casos introduzcamos dos matrices: A, la matriz, en cuyas columnas se escriben las coordenadas de los vectores a_1, a_2, b_1, b_2, B, la matriz que se obtiene de A agregándole la columna de coordenadas del vector $a_0 - b_0$. Sean el rango de $A = r_1$, y el rango de $B = r_2$. Puede realizarse uno de los seis casos:

1) $r_1 = 4$, $r_2 = 5$. Los planos no yacen en una variedad cuadridimensional (los planos se cruzan absolutamente).

2) $r_1 = r_2 = 4$. Los planos poseen un punto común, por lo tanto, yacen en una variedad cuadridimensional, pero no se encuentran en una variedad tridimensional (los planos se intersecan absolutamente).

3) $r_1 = 3$, $r_2 = 4$. Los planos no tienen ningún punto común, yacen en una variedad cuadridimensional, pero no se encuentran en una variedad tridimensional (los planos se intersecan paralelamente a una recta, a saber: ambos son paralelos a la recta con la ecuación $a_1t_1 + a_2t_2 = b_1t_3 + b_2t_4$).

4) $r_1 = r_2 = 3$. Los planos yacen en un espacio tridimensional y se intersecan por una recta.

5) $r_1 = 2$, $r_2 = 3$. Los planos no tienen puntos comunes, pero se hallan en un espacio tridimensional (los planos son paralelos).

6) $r_1 = r_2 = 2$. Los planos coinciden, $r_2 \geqslant r_1 \geqslant 2$, ya que los dos pares de vectores a_1, a_2 y b_1, b_2 son linealmente independientes.

1347. Indicación. Efectuar la demostración empleando la inducción según el número k.

1348. El octaedro con los vértices en los puntos: $(1, 1, -1, -1)$, $(1, -1, 1, -1)$, $(1, -1, -1, 1)$, $(-1, -1, 1, 1)$, $(-1, 1, -1, 1)$, $(-1, 1, 1, -1)$. **Indicación.** Al determinar las coordenadas de los vértices tener en cuenta que los vértices de la sección buscada deben ser puntos de intersección del subespacio secante con las aristas del cubo y que a lo largo de cada arista del cubo las tres coordenadas son iguales a ± 1 y la cuarta varía desde $+1$ hasta -1.

1349. Un tetraedro con los vertices en los puntos: $\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$. **Indicación.** Hallar las proyecciones de los vértices.

1350. Indicación. Tomar el extremo dado de la diagonal como origen y las aristas que salen de éste, en calidad de ejes de las coordenadas y mostrar que las variedades lineales paralelas en cuestión se definen mediante las ecuaciones

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

y el punto de intersección de la diagonal con la k-ésima variedad perteneciente a dichas variedades, tiene todas las coordenadas iguales a un mismo número k/n $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

1352. La forma bilineal g debe ser simétrica, es decir, $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ y la forma cuadrática correspondiente a ésta, $f = \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ es definida positiva; $(e_i, e_j) = a_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

1357. Pueden añadirse los vectores $(2, 2, 1, 0)$, $(5, -2, -6, -1)$.

1358. Pueden añadirse los vectores $(1, -2, 1, 0)$, $(25, 4, -17, -6)$.

1359. Uno de los vectores $\pm\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

1360. Por ejemplo, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

1361. $(1, 2, 2, -1)$, $(2, 3, -3, 2)$, $(2, -1, -1, -2)$.

1362. $(1, 1, -1, -2)$, $(2, 5, 1, 3)$.

1363. $(2, 1, 3, -1)$, $(3, 2, -3, -1)$, $(1, 5, 1, 10)$.

1366. Por ejemplo: $b_1 = (2, -2, -1, 0)$, $b_2 = (1, 1, 0, -1)$.

1367. Por ejemplo: $6x_1 - 9x_2 - x_3 = 0$, $x_2 + x_4 = 0$.

1369. Sea $a_1, a_2, \ldots, a_k$ la base de L. Buscaremos y en forma de $y = \sum_{j=1}^{k} c_j a_j$. Multiplicando de modo escalar esta igualdad por a_i y notando que $(a_i, y) = (a_i, x)$, obtenemos el sistema de ecuaciones $\sum_{j=1}^{k} (a_i, a_j)\, c_j = (a_i, x)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, el cual según el sentido de $c_1, c_2, \ldots, c_k$, debe tener una solución única. Hallando y, suponemos que $z = x - y$.

1370. $y = 3a_1 - 2a_2 = (1, -1, -1, 5)$; $z = (3, 0, -2, -1)$.

1371. $y = 2a_1 - a_2 = (3, 1, -1, -2)$; $z = (2, 1, -1, 4)$.

1372. $y = (5, -5, -2, -1)$; $z = (2, 1, 1, 3)$.

1373. Indicación. Deducir la relación

$$|x-u|^2=|(x-x_0)-y|^2+|y-(u-x_0)|^2,$$

donde y es la proyección ortogonal de $x-x_0$ sobre L.

1374. a) 5; b) 2.

1375*. Indicación. Pongamos $x-x_0=y+z$, donde $y\in L$, $z\in L^*$. Según el problema 1373, $d^2=(z, z)$. Sea $y=\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\ldots+\lambda_ha_h$. De la última columna del determinante $G(a_1, a_2, \ldots, a_h, x-x_0)$ hay que restar las columnas anteriores, multiplicadas por $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$, respectivamente, y mostrar que en lugar de $(a_i, x-x_0)$ se obtiene un cero y en lugar de $(x-x_0, x-x_0)$ tendremos $(x-x_0, z)=(z, z)$.

1376. Indicación. Sean $u_1\in P_1$, $u_2\in P_2$, y, la proyección ortogonal de x_1-x_2 sobre L. Deducir la igualdad

$$|u_1-u_2|^2=|(x_1-x_2)-y|^2+|y+(u_1-x_1)-(u_2-x_2)|^2.$$

1377. 3.

1378. Solución. Tomemos uno de los vértices de la primera cara como origen de coordenadas. Supongamos que los otros vértices de la primera cara se prefijan mediante los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_k$ y los vértices de la segunda cara, mediante los vectores $x_{k+1}, \ldots, x_n$. Busquemos la distancia entre las variedades lineales, definidas por los vértices de estas caras (problema 1346). Estas variedades son

$$x_1t_1+\ldots+x_kt_k \text{ y } (x_{k+1}-x_n)t_{k+1}+\ldots+(x_{n-1}-x_n)t_{n-1}+x_n.$$

La distancia buscada es igual a la longitud de la componente ortogonal z del vector x_n con respecto al subespacio L, tendido sobre los vectores $x_1, \ldots, x_k$, $x_{k+1}-x_n, \ldots, x_{n-1}-x_n$. Multiplicando la igualdad

$$x_n=x_1t_1+\ldots+x_kt_k+(x_{k+1}-x_n)t_{k+1}+\ldots+(x_{n-1}-x_n)t_{n-1}+z$$

por los vectores $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}-x_n, \ldots, x_{n-1}-x_n$, obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
&t_1+\frac{1}{2}t_2+\ldots+\frac{1}{2}t_k=\frac{1}{2};\\
&\frac{1}{2}t_1+t_2+\ldots+\frac{1}{2}t_k=\frac{1}{2};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{1}{2}t_1+\frac{1}{2}t_2+\ldots+t_k=\frac{1}{2};\\
&t_{k+1}+\frac{1}{2}t_{k+2}+\ldots+\frac{1}{2}t_{n-1}=-\frac{1}{2};\\
&\frac{1}{2}t_{k+1}+t_{k+2}+\ldots+\frac{1}{2}t_{n-1}=-\frac{1}{2};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{1}{2}t_{k+1}+\frac{1}{2}t_{k+2}+\ldots+t_{n-1}=-\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

de donde, sumando las primeras k ecuaciones y las úlimas $n-k-1$, es fácil hallar: $t_1=\ldots=t_k=\frac{1}{k+1}$; $t_{k+1}=\ldots t_{n-1}=-\frac{1}{n-k}$. Por eso $z=\frac{x_{k+1}+\ldots+x_n}{n-k}-\frac{x_1+\ldots x_k}{k+1}$. De aquí se ve que z une los centros de dichas caras.

Ya que la distancia entre las variedades, definidas por los vértices de las caras dadas, según lo demostrado, es igual a la distancia entre los centros de

estas caras esta misma será la distancia entre dichas caras. Elevando al cuadrado la expresión para z y luego extrayendo la raíz, hallamos:

$$|z| = \sqrt{\frac{n+1}{2(n-k)(k+1)}}.$$

1379. Indicación. Hallar α de la condición $(x - \alpha e, e) = 0$. Al demostrar la unicidad de ambos miembros de la igualad $\alpha_1 \cdot e + z_1 = \alpha_2 e + z_2$, multiplicar de modo escalar por e.

1380. Indicación. Examinar el cuadrado escalar del vector $y = x - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$, donde $\alpha_i = (x, e_i)$ y aplicar las propiedades c) y d) del problema anterior.

1381. Indicación. El primer procedimiento: examinar un cuadrado escalar $(x + ty, x + ty)$ como un trinomio de segundo grado no negativo con respecto a t. El segundo procedimiento: para $y \neq 0$ representar x como $x = \alpha y + z$, donde $(y, z) = 0$, mostrar que $(x, x) \geqslant \alpha^2 (y, y)$ con la particularidad de que el signo de igualdad tiene lugar si, y sólo si, $x = \alpha y$, y aclarar que

$$(x, y)^2 = \alpha^2 (y, y)(y, y) \leqslant (x, x)(y, y).$$

El tercer procedimiento: emplear la desigualdad del problema 503 a las coordenadas de los vectores x e y en una base ortonormal.

1382. Indicación. Primer procedimiento: examinar el cuadrado escalar $(x + ty, x + ty)$, donde $t = \overline{s}(x, y)$, como un trinomio de segundo grado no negativo con respecto a s (s es real). El segundo procedimiento: para $y \neq 0$ poner $x = \alpha y + z$, donde α es un número complejo y $(y, z) = 0$, mostrar que $(x, x) \geqslant \alpha\overline{\alpha}(y, y)$, con la particularidad de que el signo de igualdad tiene lugar cuando, y sólo cuando, $x = \alpha y$, y aclarar que

$$(x, y)(y, x) = \alpha\overline{\alpha}(y, y)(y, y) \leqslant (x, x)(y, y).$$

Tercer procedimiento: aplicar la desigualdad del problema 505 a las coordenadas de los vectores x e y en una base ortonormal.

1384. $\left(\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right)^2 \leqslant \int_a^b [f(x)]^2\, dx \int_a^b [g(x)]^2\, dx$.

1385. $AB = BC = AC = 6$; $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$.

1386. $AB = 5$; $BC = 10$; $AC = 5\sqrt{3}$; $\angle A = 90°$; $\angle B = 60°$; $\angle C = 30°$.

1389. Indicación. Si las aristas se dan mediante los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_n$, examinar la expresión $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n|^2$.

1390. Indicación. Examinar la expresión $|x + y|^2 + |x - y|^2$.

1393. Para n impar no hay diagonales ortogonales, para $n = 2k$ la cantidad buscada es igual a

$$\frac{1}{2} C_n^k = C_{2k-1}^{k-1}.$$

1394. $a \cdot \sqrt{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a\sqrt{n} = \infty$

1395. $\varphi_n = \arccos \frac{1}{\sqrt{n}}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \frac{\pi}{2}$; $\varphi_4 = 60°$.

1396. $R = \frac{a\sqrt{n}}{2}$. Para $n = 1, 2, 3$ $R < a$; para $n = 4$ $R = a$; para $n > 4$ $R > a$.

1398. Indicación. Mostrar que el origen de coordenadas puede unirse con otros vértices cualesquiera mediante un eslabón de aristas y hacer uso del problema anterior.

1399. Utilizar el problema 1379.

1400. Solución. $\cos(x, y) = \frac{(x, y)}{|x|\cdot|y|} = \frac{(y, y)}{|x|\cdot|y|} = \frac{|y|}{|x|}$. $\cos(x, y') =$ $= \frac{(x, y')}{|x|\cdot|y'|} = \frac{(y, y')}{|x|\cdot|y'|} = \frac{|y|\cdot|y'|}{|x|\cdot|y'|}\cos(y, y') \leqslant \frac{|y|}{|x|} = \cos(x, y)$. El signo de igualdad puede tener lugar cuando, y sólo cuando, $\cos(y, y') = 1$, es decir, según el problema 1399 cuando $y' = \alpha\cdot y$ para $\alpha > 0$.

1401. $\arccos\sqrt{\frac{k}{n}}$. **1402.** 60°. **1403.** 30°.

1405. $\arccos\frac{2}{3}$. **Indicación.** Sea a_i un vector de A_0 on A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Examinar dos vectores $a_1t_1 + a_2t_2$ y $a_3t_3 + a_4t_4$; mostrar que el cuadrado del coseno del ángulo entre ellos es igual a $\frac{(t_1+t_2)^2(t_3+t_4)^2}{4(t_1^2+t_1t_2+t_2^2)(t_3^2+t_3t_4+t_4^2)}$ y hallar el máximo de la función $(t_1+t_2)^2$ a condición de que $t_1^2+t_1t_2+t_2^2 = 1$.

1406. 45°. **Indicación.** Buscar el mínimo de los ángulos de los vectores del segundo plano con sus proyecciones ortogonales sobre el primer plano.

1407. Indicación. Mostrar que cada uno de los sistemas $f_1, \ldots, f_k$ y $g_1, \ldots, g_k$ es base del subespacio L_k tendido sobre los vectores $e_1, \ldots, e_k$, que $(f_i, g_j) = 0$ para $i \neq j$, y por fin, que en la igualdad $g_k = c_1f_1 + \ldots + c_kf_k$ todos los coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}$ son nulos.

1408. Indicación. Poniendo $(x^2-1)^k = u_k(x)$, comprobar que $u_k^{(j)}(\pm 1) = 0$ para $j < k$ e integrando por partes $\int_{-1}^{+1} u_k^{(k)}(x)\, x^j\, dx$ varias veces, hasta que desaparezca el factor tipo x^s bajo el signo de la integral, mostrar que esta integral es nula para $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Deducir de ahí la igualdad necesaria:

$$\int_{-1}^{+1} P_j(x)\, P_k(x)\, dx = 0 \text{ para } j \neq k.$$

1409. $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$, $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$, $P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$; $P_k(x) = \frac{1}{2^k k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j\frac{(2j)!}{(2j-k)!}x^{2j-k} =$ $= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2j-1)}{(k-j)!\,(2j-k)!\,2^{k-j}}x^{2j-k}$, con la particularidad de que en estas expresiones es necesario omitir todos los sumandos con el exponente negativo de la potencia de x.

1410. $\sqrt{\frac{2}{2k+1}}$. **Solución.** Pongamos $(x^2-1)^k = u_k(x)$ y calculemos el cuadrado escalar de (P_k, P_k). Integrando por partes, hallamos

$$\int_{-1}^{+1} u_k^{(k)}(x)\cdot u_k^{(k)}(x)\, dx = -\int_{-1}^{+1} u_k^{(k-1)}(x)\, u_k^{(k+1)}(x)\, dx = \ldots$$

$$\ldots = (-1)^k\int_{-1}^{+1} u_k(x)\, u_k^{(2k)}(x)\, dx = (2k)!\int_{-1}^{+1}(1-x)^k(1+x)^k\, \partial x$$

Integrando de nuevo por partes, encontramos

$$\int_{-1}^{+1} (1-x)^k (1+x)^k \, dx = \frac{k}{k+1} \int_{-1}^{+1} (1-x)^{k-1} (1+x)^{k+1} \, dx = \ldots,$$

$$= \frac{k!}{(k+1)(k+2)\ldots(2k)} \int_{-1}^{+1} (1+x)^{2k} \, dx = \frac{(k!)^2 \, 2^{2k+1}}{(2k)! \, (2k+1)},$$

de donde

$$(P_k, P_k) = \frac{1}{2^{2k} (k!)^2} (2k)! \frac{(k!)^2 \, 2^{2k+1}}{(2k)! \, (2k+1)} = \frac{2}{2k+1}.$$

1411. $P_k(1) = 1$. **Indicación.** Aplicar la regla de Leibniz de la diferenciación del producto a la expresión $P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k} [(x+1)^k (x-1)^k]$.

1412. $P_k(x) = C_k f_k(x)$, donde $C_k = \frac{(2k)!}{2^k (k!)^2} = \frac{C_{2k}^k}{2^k} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \ldots \ \cdot 2k-1}{k!}$ es el coeficiente mayor del polinomio $P_k(x)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$). **Indicación.** Utilizar los problemas 1407, 1408, 1409.

1414. Indicación. Suponiendo que $x^n = [x^n - f(x)] + f(x)$, mostrar que el mínimo se alcanza cuando, y sólo cuando, $f(x)$ es una componente ortogonal para x^n con respecto al subespacio de los polinomios de grado $\leqslant n-1$ (problema 1373) y emplear los problemas 1410, 1412 y 1413.

1415. $g(a_1, a_2)$ es igual al cuadrado del área del paralelogramo, construido sobre los vectores a_1, a_2; $g(a_1, a_2, a_3)$ es igual al cuadrado del volumen del paralelepípedo, construido sobre los vectores a_1, a_2, a_3.

1416. Indicación. Examinar el sistema de ecuaciones lineales homogéneo con el determinante $g(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

1417. Indicación. Buscar la base recíproca partiendo de las relaciones

$$f_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk} e_k \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

1418. a) $T = (S')^{-1}$; b) $T = (\overline{S}')^{-1}$. En este caso el rasgo significa la transposición, y la raya, la sustitución de los elementos por los conjugados complejos.

1419. Indicación. Primer procedimiento: mostrar que el determinante de Gram $g(a_1, \ldots, a_k)$ es igual al cuadrado del módulo del determinante compuesto por las coordenadas de los vectores $a_1, \ldots, a_k$ en cualquier base ortonormal de un subespacio k-dimensional que contiene estos vectores.

Segundo procedimiento: mostrar que una forma cuadrática no negativa $(a_1x_1 + \ldots + a_kx_k, a_1x_1 + \ldots + a_kx_k)$ con respecto a $x_1, \ldots, x_k$ es definida positiva cuando, y sólo cuando, los vectores $a_1, \ldots, a_k$ son linealmente independientes.

Tercer procedimiento: utilizando la constancia del determinante de Gram para la ortogonalización de los vectores (problema 1415), mostrar que si los vectores $b_1, \ldots, b_k$ se obtienen de $a_1, \ldots, a_k$ mediante la ortogonalización, $g(a_1, \ldots, a_k) = |b_1|^2 \ldots |b_k|^2$, y aplicar el problema 1413.

1421. $\frac{1}{C_{2n}^n \sqrt{2n+1}}$. **Indicación.** Primer procedimiento: observando que la distancia buscada es igual a la longitud de la componente ortogonal del vector $-x^n$ con respecto al subespacio de los polinomios de grado que no supera a $n-1$, emplear el problema anterior y el 418.

Segundo procedimiento (no se usa el problema 418): la distancia buscada la da el mínimo de la integral $\int_0^1 [f(x)]^2\,dx$, donde $f(x)$ es un polinomio de n-ésimo grado con el coeficiente mayor igual a la unidad. Esto permite variando los límites de integración, reducir el problema a la correspondiente propiedad extremal del polinomio de Legendre (problema 1414).

1422. Indicación. Emplear los problemas 1413 y 1415.

1423. $|D^2| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2$, con la particularidad de que el signo de igualdad tiene lugar si, y sólo si, bien $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\overline{a}_{jk} = 0$ $(i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n)$, o bien el determinante D contiene una fila nula.

1424. Indicación. En el espacio vectorial R_n introducir el producto escalar $(x, y) = \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$, donde $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_n$ son las coordenadas de x e y, respectivamente, en cierta base $e_1, \ldots, e_n$ del espacio R_n, mostrar que $D_f = g(e_1, \ldots, e_n)$ y emplear el problema 1422.

1425. Indicación. Utilizar el problema 1210, d).

1426. Indicación. Emplear las propiedades de las formas hermitianas, semejantes a las propiedades de las formas reales, indicadas en el problema 1210 (véase, por ejemplo, F. R. Gantmajer. Teoría de las matrices.—M.: Gostejizdat, 1953, parte 10, §§ 3, 9 (en ruso)).

1427. Indicación. Utilizar los razonamientos de los procedimientos primero y tercero, indicados en la respuesta del problema 1419.

1428. Indicación. Emplear el problema 1422.

1429. Solución. Supongamos que el proceso de ortogonalización transforma los vectores $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l$ en los vectores $c_1, \ldots, c_k, d_1, \ldots, d_l$ y los vectores $b_1, \ldots, b_l$ en los vectores $e_1, \ldots, e_l$. La componente ortogonal del vector e_i con respecto al subespacio L_i tendido sobre $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_{i-1}$, coincide con d_i. Efectivamente, $b_i = y_i + e_i$, donde y_i se expresa linealmente a través de $b_1, \ldots, b_{i-1}$, y e_i es ortogonal a los vectores, $e_i = y_i' + z$, donde $y_i' \in L_i$, y z es ortogonal a L_i, pero entonces $b_i = (y_i + y_i') + z$, donde $y_i + y_i' \in L_i$ y z es ortogonal a L_i. Por lo tanto, conforme al problema 1413, $z_i = d_i$ y $|d_i| \leqslant |e_i|$, con la particularidad de que el signo de igualdad tiene lugar, a ciencia cierta, bajo la condición (2), puesto que $e_i = b_i - y_i$ se expresa mediante $b_1, \ldots, b_i$, y por consiguiente, es ortogonal a $a_1, \ldots, a_k$; $b_1, \ldots, b_{i-1}$. De acuerdo con el problema 1415, tenemos

$$g(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l) = (|c_1|^2 \cdot \ldots \cdot |c_k|^2)\cdot(|d_1|^2 \cdot \ldots \cdot |d_l|^2 \leqslant$$

$$\leqslant (|c_1|^2 \cdot \ldots \cdot |c_k|^2)\cdot(|e_1|^2 \cdot \ldots \cdot |e_l|^2) =$$

$$= g(a_1, \ldots, a_k)\, g(b_1, \ldots, b_l),$$

lo que demuestra la desigualdad (1). Partiendo de la condición (2), $|d_i| = |e_i|$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ y la desigualdad (1) se convierte en cero. Si $a_1, \ldots, a_k$ ó $b_1, \ldots, b_l$ son linealmente independientes, el segundo miembro de la desigualdad (1) se anula, y puesto que el primer miembro no es negativo, de nuevo obtenemos la igualdad.

Supongamos que, al contrario, la desigualdad (1) se convierte en igualdad. Entonces, según lo dicho anteriormente, $|c_1|^2 \ldots |c_k|^2 \cdot |d_1|^2 \ldots |d_l|^2 = |c_1|^2 \ldots |c_k|^2 \cdot |e_1|^2 \ldots |e_l|^2$, de donde o bien existe $i \leqslant k$ tal que $|c_i| = 0$, es decir, $a_1, \ldots, a_k$ son linealmente dependientes, o bien existe $i \leqslant l$ tal que $|d_i| = |e_i| = 0$, o sea, $b_1, \ldots, b_l$ son linealmente dependientes, o bien $|d_i| = |e_i|$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$, de dondo se desprende que todos

los e_i, y por lo tanto, todos los b_i (como también sus combinaciones lineales) son ortogonales a $a_1, \ldots, a_k$, es decir, se cumple la condición

1430. Indicación. Emplear el problema anterior.

1431. Indicación. Emplear los problemas 1425 y 1429.

1432. Indicación. Emplear los problemas 1426 y 1429.

1433. Solución. a) Supongamos que los números del sistema (1) son distancias de todos los pares posibles de los vértices $M_0, M_1, \ldots, M_n$ de un símplice n-dimensional, con la particularidad de que

$$a_{ij} = \overline{M_iM_j} \; (i, j = 0, 1, 2, \ldots, n; \; i > j) \tag{2}$$

Designemos por e_i el vector que va de M_0 a M_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Entonces tenemos

$$a_{i0}^2 = (e_i, e_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

$$a_{ij}^2 = (e_i - e_j, e_i - e_j) \; (i, j = 1, 2, \ldots, n; \; i > j) \tag{3}$$

Partiendo de estas igualdades, hallamos los productos escalares de los vectores $e_1, \ldots, e_n$:

$$\begin{gathered}(e_i, e_i) = a_{i0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);\\ (e_i, e_j) = \frac{a_{i0} + a_{j0} - a_{ij}}{2} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n; \; i > j).\end{gathered} \tag{4}$$

Utilizando estas relaciones, escribamos la matriz de Gram de los vectores $e_1, \ldots, e_n$:

$$\begin{pmatrix} a_{10} & \frac{a_{20} + a_{10} - a_{21}}{2} & \ldots & \frac{a_{n0} + a_{10} - a_{n1}}{2} \\ \frac{a_{20} + a_{10} - a_{21}}{2} & a_{20} & \ldots & \frac{a_{n0} + a_{20} - a_{n2}}{2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{a_{n0} + a_{10} - a_{n1}}{2} & \frac{a_{n0} + a_{20} - a_{n2}}{2} & \ldots & a_{n0} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Puesto que los puntos $M_0, M_1, \ldots, M_n$ no yacen en una variedad $(n - 1)$-dimensional, los vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n$ son linealmente independientes. Designando por D_k el menor angular de orden k de la matriz (5) y utilizando el problema 1419, obtenemos

$$D_k > 0 \; (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Así, pues, las condiciones (6) son necesarias para que los números del sistema (1) sean las distancias de los vértices de un símplice n-dimensional. Mostremos que estas condiciones son suficientes. Al cumplirse las condiciones (6) la matriz (5) es una matriz de Gram de un sistema linealmente independiente de vectores $e_1, \ldots, e_n$ (véase el problema 1352 ó 1210, c)). Por eso las igualdades (4) son correctas, de donde se desprenden las igualdades (3). Tomando el origen de coordenadas por M_0, y el extremo del vector e_i por M_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, obtenemos la ejecución de las igualdades (2), lo que se requería.

En el caso b) la condición necesaria y suficiente es el carácter no negativo de todos los menores principales (y no sólo de los angulares) de la matriz (5). La necesidad se demuestra de la misma manera que en el caso a), pero con diferencia de que los vectores $e_1, \ldots, e_n$ pueden ser linealmente dependientes. La suficiencia se demuestra con ayuda del problema 1425 ó 1210, d).

1434. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

1435. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, si e_1 se convierte en e_2, y

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, si e_2 se convierte en e_1.

1436. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 1437. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 1438. $\begin{Vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{Vmatrix}$.

1439. Los primeros k elementos de la diagonal principal de la matriz de transformación son iguales a la unidad y todos los demás, son nulos.

1440. En la i-ésima columna de la matriz de transformación se encuentran las coordenadas del vector b_i en la base $a_1, \ldots, a_n$.

1441. φ es lineal, $A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1442. φ no es lineal.

1443. φ no es lineal.

1444. φ es lineal, $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1445. $\begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. 1446. $\frac{1}{3} = \begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$.

1448. En la base e_1, e_2, e_3 la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, en la base b_1, b_2, b_3 la matriz $\begin{pmatrix} \frac{20}{3} & -\frac{5}{3} & 5 \\ -\frac{16}{3} & \frac{4}{3} & -4 \\ 8 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

1449. a) al multiplicar a la izquierda $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$; b) al multiplicar a la derecha $\begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c \\ b & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & d \end{pmatrix}$.

1450. a) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}$.

1451. En la matriz se permutarán las filas i-ésima y j-ésima y las columnas i-ésima y j-ésima.

1452. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

1453. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 1454. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

1457. $\begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -29^1/_2 & -25 \end{pmatrix}$. 1458. $\begin{pmatrix} 109 & 93 \\ 34 & 29 \end{pmatrix}$. 1461. n^2.

1464. **Indicación.** Emplear el problema anterior y la definición de función con respecto a la matriz (problema 1148).

1465. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Los vectores propios tienen el siguiente aspecto $c\,(1, 1, -1)$, donde $c \neq 0$.

1466. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Los vectores propios tienen la forma $c_1\,(1, 2, 0) + c_2\,(0, 0, 1)$, donde c_1 y c_2 no toman simultáneamente el valor 0.

1467. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Los vectores propios para el valor de 1 tienen la forma $c\,(1, 1, 1)$ y para $\lambda = 0$, la forma es $c\,(1, 2, 3)$, donde $c \neq 0$.

1468. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Los vectores propios tienen la forma $c\,(3, 1, 1)$, donde $c \neq 0$.

1469. $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Los vectores propios para $\lambda = 3$ tienen la forma $c\,(1, 2, 2)$ y para $\lambda = -1$, la forma $c\,(1, 2, 1)$, donde $c \neq 0$.

1470. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$. Los vectores propios para $\lambda = 1$ tienen la forma $c_1\,(2, 1, 0) + c_2\,(1, 0, -1)$ y para $= -1$ la forma es $c\,(3, 5, 6)$, donde c_1 y c_2 no son simultáneamente nulos y $c \neq 0$.

1471. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2 + 3i$, $\lambda_3 = 2 - 3i$. Los vectores propios para $\lambda = 1$ tienen la forma $c\,(1, 2, 1)$, para $\lambda = 2 + 3i$, la forma $c\,(3 - 3i, 5 - 3i, 4)$, para $\lambda = 2 - 3i$, la forma es $c\,(3 + 3i, 5 + 3i, 4)$.

1472. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Los vectores propios para $\lambda = 1$ tienen la forma $c\,(0, 0, 0, 1)$ y para $\lambda = 0$, la forma $c_1\,(0, 1, 0, 0) + c_2\,(0, 0, 1, 0)$, donde $c \neq 0$ y c_1 y c_2 no son simultáneamente nulos.

1473. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Los vectores propios para $\lambda = 1$ tienen la forma $c_1\,(1, 0, 1, 0) + c_2\,(0, 0, 0, 1)$ y para $\lambda = 0$, la forma $c_1\,(0, 1, 0, 0) + c_2\,(0, 0, 1, 0)$, donde los números c_1 y c_2 no son simultáneamente nulos.

1474. $\lambda = 2$. Los vectores propios tienen la forma $c_1\,(1, 1, -1, 0) + c_2\,(1, 1, 0, 1)$, donde c_1, c_2 no son simultáneamente iguales a cero.

1477. **Indicación.** Emplear los problemas 820 y 1476.

1479. $\begin{matrix} a_1 = (1, 1, 1), \\ a_2 = (1, 1, 0), \\ a_3 = (1, 0, -3), \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1480. La matriz no se reduce a la forma diagonal.

1481. $\begin{matrix} a_1 = (1, 1, 0, 0), \\ a_2 = (1, 0, 1, 0), \\ a_3 = (1, 0, 0, 1), \\ a_4 = (1, -1, -1, -1), \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1483. $\begin{matrix} a_1 = (1, 0, 0, 1), \\ a_2 = (0, 1, 1, 0), \\ a_3 = (0, -1, 1, 0), \\ a_4 = (-1, 0, 0, 1), \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1484. Por ejemplo,

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \dots & -1 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde por la segunda diagonal los elementos por encima de la diagonal principal son iguales $a-1$, y por debajo de ella, $+1$; para n impar en la intersección de las diagonales puede haber tanto $+1$, como -1. La matriz diagonal B tiene en la diagonal principal por encima $n/2$ para n par y $(n+1)/2$ para n impar elementos iguales $a+1$, y los demás elementos son iguales $a-1$.

Indicación. Examinar la transformación lineal φ de un espacio n-dimensional que tiene la matriz A en cierta base, hallar la base que consta de vectores propios de esta transformación y aplicar el problema 1477.

1486. Dos elementos cualesquiera α_k y α_{n-k+1} que están a distancias iguales de los extremos de la diagonal secundaria, deben ser los dos distintos de cero o bien los dos se anulan.

Indicación. Examinar una transformación lineal φ de un espacio n-dimensional que corresponde a la matriz A en cierta base y aplicar los problemas 1117, 1132 y 1484.

1487. El único valor propio es $\lambda=0$; los vectores propios son polinomios de grado cero.

1491. Solución. Primero demostremos la igualdad

$$\text{dim. } L=\text{dim. } \varphi L+\text{dim. } L_0, \tag{1}$$

donde L_0 es la intersección de L con el núcleo $\varphi^{-1}0$ de la transformación φ. Para ello la base $a_1, a_2, \dots, a_k$ del subespacio L_0 la completamos con los vectores $b_1, b_2, \dots, b_l$ hasta la base de L (para $L_0=0$ faltan los vectores a_i, y para $L_0=L$, los vectores b_i). Los vectores $\varphi b_1, \varphi b_2, \dots, \varphi b_l$ forman la base φL. En efecto, si $y \in \varphi L$, $y=\varphi x$, donde $x\in L$. Si $x=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i a_i+\sum_{i=1}^{l}\beta_i b_i$, $y=\varphi x=\sum_{i=1}^{l}\beta_i\varphi b_i$, ya que $\varphi a_i=0$ $(i=1, 2, \dots, k)$. Los vectores $\varphi b_1, \varphi b_2, \dots, \varphi b_l$ son linealmente independientes, puesto que de $\sum_{i=1}^{l}\beta_i\varphi b_i=0$ se desprende que $\sum_{i=1}^{l}\beta_i b_i\in L_0$, de donde $\sum_{i=1}^{l}\beta_i b_i=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i a_i$, y por lo tanto $\beta_i=0$ $(i=1, 2, \dots, l)$.

Así, pues, $\text{dim. } L=l+k=\text{dim. } \varphi L+\text{dim. } L_0$.

a) Partiendo de (1), en virtud de $L_0\subset\varphi^{-1}0$, hallamos

$$\text{dim. } L=\text{dim. } \varphi L+\text{dim. } L_0\leqslant\text{dim. } \varphi L+\text{def. } \varphi;$$

$$\text{dim. } L-\text{def. } \varphi\leqslant\text{dim. } \varphi L.$$

Prosiguiendo, $\text{dim. } \varphi L=\text{dim. } L-\text{dim. } L_0\leqslant\text{dim. } L$.

b) Poniendo $\varphi^{-1}L=L'$. Ya que $0\in L$, $\varphi^{-1}0\subset\varphi^{-1}L=L'$ y $L'\cap\varphi^{-1}0=\varphi^{-1}0$. Usando (1) con la sustitución de L por L', obtenemos

$$\text{dim. } L'=\text{dim. } \varphi L'+\text{dif. } \varphi. \tag{2}$$

Puesto que $\varphi L'\subset L$, $\text{dim. } \varphi L'\leqslant\text{dim. } L$ y según (2), $\text{dim. } L'\leqslant\text{dim. } L+\text{def. } \varphi$, con lo que queda demostrada la segunda de las desigualdades de b).

Mostremos que $\varphi L'=L\cap\varphi R_n$.

Puesto que $\varphi L' \subset L$ y $\varphi L' \subset \varphi R_n$, $\varphi L' \subset L \cap \varphi R_n$. Si $x \in L \cap \varphi R_n$, $x = \varphi x'$, donde $x' \in \varphi^{-1}L = L'$, o sea, $x \in \varphi L'$. De aquí $L \cap \varphi R_n \subset \varphi L'$.

Ya que la dim. $(L + \varphi R_n) \leqslant n$, utilizando la relación de las dimensiones de la suma y la intersección de los subespacios (problema 1316), obtenemos

$$\text{dim. } \varphi L' = \text{dim. } (L \cap \varphi R_n) = \text{dim. } L + \text{dim. } \varphi R_n - \text{dim. } (L + \varphi R_n) \geqslant$$
$$\geqslant \text{dim. } L + \text{dim. } \varphi R_n - n = \text{dim. } L - \text{def. } \varphi.$$

De aquí, en virtud de (2), hallamos

$\text{dim. } L' = \text{dim. } \varphi L' + \text{def. } \varphi \geqslant (\text{dim. } L - \text{def. } \varphi) + \text{def. } \varphi = \text{dim. } L$, con lo que queda demostrada la primera de las desigualdades de b).

1492. Indicación. Examinar las transformaciones φ y ψ del espacio R_n con las matrices A y B y aplicar el problema anterior al subespacio $L = \chi R_n$.

1494. El único valor propio $\lambda = 1$. Los vectores propios tienen el aspecto $c_1 (a_1 + 2a_2) + c_2 (a_2 + a_3 + 2a_4)$, donde c_1, c_2 no son simultáneamente iguales a cero.

1495. Indicación. Examinar la matriz de la transformación φ en la base, cuyos primeros vectores son los vectores propios, linealmente independientes φ, pertenecientes a λ_0. El otro camino está relacionado con la aplicación del problema 1074.

1501. El subespacio nulo y el subespacio L_k compuestos por todos los polinomios de grado $\leqslant k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

1503. Serán invariantes los siguientes subespacios: el subespacio nulo y cualquier subespacio tendido sobre cualquier subsistema de vectores de la base $a_1, a_2, \ldots, a_n$; su cantidad es igual a 2^n.

Indicación. Utilizando los problemas 1495 y 1502, mostrar que cualquier subespacio invariante no nulo L tiene una base que es en sí un subsistema de vectores $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

1504. Una recta con el vector básico $a_1 = (2, 2, -1)$, cualquier recta del plano L con los vectores básicos $a_2 = (1, 1, 0)$ y $a_3 = (1, 0, -1)$, es decir, los planos $x_1 - x_2 + x_3 = 0$, este mismo plano L, cualquier plano que pasa a través del vector a, todo el espacio y el subespacio nulo.

1505. La recta con el vector básico $(1, -2, 1)$, el plano con los vectores básicos $(1, 1, 1)$ y $(1, 2, 3)$, es decir, el plano con la ecuación $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$, todo el espacio y el subespacio nulo.

1509. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 0$. Los subespacios radicales constan de los vectores para $\lambda_1 = 1$: $c\ (1, 1, 1)$; para $\lambda_{2,3} = 0$: $c_1 (1, 1, 0) + c_2 (1, 0, -3)$.

1510. $\lambda_1 = 3$, $\lambda_{2,3} = -1$ Los subespacios radicales se componen de los vectores para $\lambda_1 = 3$: $c\ (1, 2, 2)$; para $\lambda_{2,3} = -1$: $c_1 (1, 1, 0) + c_2 (1, 0, -1)$.

1511. $\lambda_{1,2,3} = -1$. Todo el espacio es un subespacio radical.

1512. $\lambda_{1,2} = 2$, $\lambda_{3,4} = 0$. Los subespacios radicales constan de vectores:

$$\text{para } \lambda_{1,2} = 2\text{: } c_1 (1, 0, 1, 0) + c_2 (1, 0, 0, 1);$$

$$\text{para } \lambda_{3,4} = 0\text{: } c_1 (1, 0, 0, 0) + c_2 (0, 1, 0, 1).$$

1515. a) Cualquier número α es valor propio. Los vectores propios, correspondientes a éste, tienen la forma $ce^{\alpha x}$, donde $c \neq 0$;

b) el subespacio radical, correspondiente al número α, consta de todas las funciones tipo $(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)\, e^{\alpha x}$, donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son cualesquiera números y n es cualquier número no negativo entero.

1517. Si el polinomio mínimo $g(\lambda) = \lambda^n - c_n\lambda^{n-1} - c_{n-1}\lambda^{n-2} \ldots - c_1$, la matriz de la transformación φ tiene la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & c_1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & c_2 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & c_3 \\ & & \ldots & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & c_n \end{pmatrix}.$$

1518. La célula de Jordan

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}.$$

1520. Para $n = 2$ el giro del plano en un ángulo $\alpha \neq k\pi$ no posee rectas invariantes. El subespacio L contiene una recta de puntos inmóviles cuando, y sólo cuando, la transformación φ_1 inducida por la transformación φ sobre L, posee su propio valor, igual a la unidad.

1523. **Indicación.** Al demostrar la afirmación a), utilizar la igualdad $1 = h_1(\lambda) u_1(\lambda) + h_2(\lambda) u_2(\lambda)$, donde $u_1(\lambda)$ y $u_2(\lambda)$ son polinomios con respecto a λ; b) se deduce de a).

1524. $g(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)$. $R_3 = L_1 + L_2$, donde L_1 tiene una base $f_1 = e_1$, $f_2 = e_2 - e_3$, y L_2 tiene la base $f_3 = e_2$.

Indicación. Al buscar $g(\lambda)$ utilizar el problema 1485.

1525. $g(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$. $R_3 = L_1 + L_2$, donde L_1 tiene, por ejemplo, una base igual a $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_1 - e_3$, y L_2, la base $2e_1 - 5e_2 - 6e_3$.

1526. $g(\lambda) = [\lambda - (a, a)] \lambda$. $R_n = L_1 \dotplus L_2$, donde L_1 está tendido sobre el vector a y L_2 está formado por todos los vectores, ortogonales a a.

1527. Si λ_0 es el valor propio de φ, la forma de Jordan consta de una célula de orden n con λ_0 en la diagonal.

1529. **Solución.** A) Pongamos $f_i(\lambda) = \dfrac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)^{k_i}}$ $(i = 1, 2, \dots, s)$. Los polinomios $f_i(\lambda)$ son primos entre sí. Esto significa que existen polinomios $h_i(\lambda)$ $(i = 1, 2, \dots, s)$ tales que $1 = \sum_{i=1}^{s} f_i(\lambda) h_i(\lambda)$, de donde para cualquier vector x:

$$x = \sum_{i=1}^{s} x_i, \tag{1}$$

donde $x_i = f_i(\varphi) \cdot h_i(\varphi) x \in P_i$, puesto que $(\varphi - \lambda_i \varepsilon)^{k_i} x_i = f(\varphi) h_i(\varphi) x = 0$ según el teorema de Hamilton—Cayley, en virtud del cual $f(\varphi) = 0$.

La unicidad del desarrollo de (1) es suficiente demostrarla para $x = 0$. Empleando para ambos miembros de la igualdad $\sum_{i=1}^{s} x_i = 0$ la transformación $f_i(\varphi)$, obtenemos $f_i(\varphi) x_i = 0$, ya que $f_i(\varphi) x_j = 0$ para $j \neq i$. Prosiguiendo, $f_i(\lambda)$ $(\lambda - \lambda_i)^{k_i}$ son primos entre sí. Por lo tanto existen polinomios $p(\lambda)$ y $q(\lambda)$ tales que

$$1 = p(\lambda) f_i(\lambda) + q(\lambda) (\lambda - \lambda_i)^{k_i},$$

de donde

$$x_i = p(\varphi) f_i(\varphi) x_i + q(\varphi) (\varphi - \lambda_i \varepsilon)^{k_i} x_i = 0.$$

Esto demuestra que el espacio R_n es una suma directa de los subespacios P_i $(i = 1, 2, \dots, s)$, y la construcción de la base buscada se reduce al caso B). En el caso de un polinomio mínimo, los razonamientos son análogos (véase el problema 1523).

B) Es suficiente demostrar que dicha construcción es posible para cada paso (es decir, los vectores, que se completan hasta la base de R_h, son linealmente independientes) y que los vectores de todas las series construidas forman una base del espacio R_n. Por lo visto a cada serie en la matriz de la transformación ψ le corresponde una célula de Jordan con cero, y en la matriz de la transformación $\varphi = \lambda_0 \varepsilon + \psi$ le corresponde la célula con λ_0 en la diagonal.

La posibilidad de construir a cada paso se demuestra de modo inductivo para $h = k, k - 1, \ldots, 1$. Para $h = k$ los vectores de cualquier base de R_{k-1} junto con los vectores de altura k que comienzan la serie del primer paso, según la construcción, forman la base de R_k. Supongamos que ya están construidas las series con vectores iniciales de altura $\geqslant h + 1$, con la particularidad de que todos los vectores de altura $h + 1$ de las series construidas $x_1, \ldots, x_p$ junto con los vectores $y_1, \ldots, y_q$ de cualquier base de R_h forman una base de R_{h+1}. Mostremos que los vectores de altura h: $\psi x_1, \ldots, \psi x_p$ de las series construidas junto con cualquier base $z_1, \ldots, z_r$ para R_{h-1} son linealmente independientes. Sea

$$\sum_{i=1}^{p} c_i \psi x_i + \sum_{j=1}^{r} d_j z_j = 0. \tag{2}$$

Aplicando a ambos miembros de esta igualdad la transformación ψ^{h-1}, obtenemos $\psi^h \sum_{i=1}^{p} c_i x_i = 0$. Por eso el vector $\sum_{i=1}^{p} c_i x_i$ pertenece a R_h y se expresa linealmente mediante su base $y_1, \ldots, y_q$. De la independencia lineal de los vectores $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q$ (como la base de R_{h+1}) se desprende que $c_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$. Por lo tanto de la igualdad (2) se deduce que $d_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$; ello demuestra que los vectores de altura h de las series construidas anteriormente junto con los vectores de cualquier base de R_{h-1} pueden completarse hasta la base de R_h. Tomando los vectores complementarios (si éstos existen) como vectores iniciales de las nuevas series, hallamos que la suposición hecha anteriormente para R_{h+1}, se cumple ahora para R_h, y la construcción puede proseguirse.

Supongamos que la construcción señalada se efectúa para $h = k, k - 1, \ldots, 1$ (en realidad, la base de todo el espacio puede obtenerse antes de llegar a $h = 1$). Puesto que R_0 no tiene base, los vectores de altura 1 de las series construidas forman, según lo demostrado, una base para R_1; en ese caso estos vectores a la par con los vectores de altura 2 de las series construidas forman la base de R_2, etc. Por fin, los vectores de altura $\leqslant k - 1$ de las series construidas a la par con los vectores de altura k de estas series forman la base de R_k. En otras palabras, los vectores de todas las series construidas forman la base de todo el espacio.

C) Sea $C = A_J - \lambda_0 E$. Ya que las matrices B^h y C^h son semejantes, el rango de la matriz C^h es igual a r_h $(h = 0, 1, \ldots, k, k + 1)$. A cada célula de Jordan de la matriz A_J con λ_0 en la diagonal en la matriz C le corresponde una célula del mismo orden con cero en la diagonal. Si D es semejante célula de orden p, el rango de la célula D^h para $h = 0, 1, 2, \ldots, p$ es igual a $p - h$, y para $h = p, p + 1, \ldots, k, k + 1$ es igual a cero. A la célula con $\lambda_i \neq \lambda_0$ de la matriz A_J le corresponde en la matriz C la célula con el número $\lambda_i - \lambda_0 \neq 0$ en la diagonal. El rango de su grado cualquiera es igual a su orden. El rango de la matriz C^h es igual a la suma de los rangos de sus células. Por eso al convertirse la matriz C^{h-1} en la matriz C^h, el rango disminuye precisamente en la cantidad de células de la matriz C con cero en la diagonal que tienen órdenes $\geqslant h$. De aquí

$$\sum_{i=h}^{k} x_i = r_{h-1} - r_h \; (h = 1, 2, \ldots, k). \tag{3}$$

Al restar de aquí una igualdad semejante, sustituyendo h por $h + 1$ (para $h < k$), obtenemos las relaciones (α) para $h = 1, 2, \ldots, k - 1$. Ya que las células de órdenes superiores a k con λ_0 en la diagonal de la matriz A_J están ausentes, $r_k = r_{k+1}$, y para $h = k$ la relación (3) nos da: $x_k = r_{k-1} - r_k = r_{k-1} - 2r_k + r_{k+1}$, es decir, la relación (α) es válida también para $h = k$.

1530. $f_1 = (1, 4, 3)$, $f_2 = (1, 0, 0)$, $f_3 = (3, 0, 1)$; $\quad A_J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1531. $f_1=(1,\ -3,\ -2)$, $f_2=(1,\ 0,\ 0)$, $f_3=(1,\ 0,\ 1)$; $A_J=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

1532. $f_1=(6,\ 6,\ -8)$, $f_2=(3,\ 1,\ 0)$, $f_3=(2,\ 1,\ -1)$; $A_J=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

1533. $f_1=(3,\ 1,\ 1)$, $f_2=(1,\ 0,\ 0)$, $f_3=(5,\ 0,\ 1)$; $A_J=\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

1534. $f_1=(1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $f_2=(-1,\ 0,\ 0,\ 0)$, $f_3=(1,\ 1,\ 0,\ 0)$, $f_4=(0,\ 0,\ -1,\ 0)$; $A_J=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

1535. $f_1=(-1,\ -1,\ -1,\ 0)$, $f_2=(2,\ 1,\ 0,\ 0)$, $f_3=(1,\ 0,\ 0,\ -1)$, $f_4=(3,\ 6,\ 7,\ 1)$, $A_J=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

1536. Para n par:

$$f_1=e_1,\ f_2=e_3,\ f_3=e_5,\ \ldots,\ f_{\frac{n}{2}}=e_{n-1},\ f_{\frac{n}{2}+1}=e_2,\ \ldots,\ f_n=e_n.$$

La matriz A_J consta de dos células de Jordan de orden $n/2$ con el cero en la diagonal principal. Para n impar:

$$f_1=e_1,\ f_2=e_3,\ f_3=e_5,\ \ldots,\ f_{\frac{n+1}{2}}=e_n,\ f_{\frac{n+1}{2}+1}=e_2,\ \ldots,\ f_n=e_{n-1}.$$

La matriz A_J se compone de dos células de Jordan de órdenes $(n+1)/2$ y $(n-1)/2$ con el cero en la diagonal principal.

1537. φ es la reflexión del espacio R_n en cierto subespacio L_1 paralelamente a un subespacio complementario L_2. En otras palabras, R_n es una suma directa de L_1 y L_2, con la particularidad de que $\varphi x = x$ si $x \in L_1$ y $\varphi x = -x$ si $x \in L_2$.

Indicación. Primer procedimiento: tomar los conjuntos de todos los x para los cuales $\varphi x = x$ y $\varphi x = -x$, en calidad de L_1 y L_2, respectivamente, y poner

$$x=\frac{1}{2}(x+\varphi x)+\frac{1}{2}(x-\varphi x).$$

Segundo procedimiento: examinar la base en la cual la matriz $A\varphi$ tiene la forma de Jordan.

1538. φ es la proyección del espacio R_n sobre cierto subespacio L_1 paralelo a un subespacio complementario L_2. En otras palabras, R_n es una suma directa de L_1 y L_2, con la particularidad de que $\varphi x = x$ si $x \in L_1$, y $\varphi x = 0$ si $x \in L_2$.

Indicación. Primer procedimiento: tomar los conjuntos de todos los x, para los cuales $\varphi x = x$ y $\varphi x = 0$, en calidad de L_1 y L_2, respectivamente, y poner $x = \varphi x + (x - \varphi x)$.

Segundo procedimiento: examinar la base, en la cual la matriz $A\varphi$ tiene la forma de Jordan.

1539. a) Para la base e_1, e_2, e_3 la transformación φ se determina de este manera:

$$\varphi e_1 = e_2,\ \varphi e_2 = e_3,\ \varphi e_3 = 0;$$

b) $\varphi e_1 = e_2$, $\varphi e_2 = -e_1$, $\varphi e_3 = 0$ (en caso de una base ortonormal φ será una proyección sobre el plano e_1, e_2, unida con el giro de este plano en un ángulo de $\pi/2$).

1541. $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$. **1542.** $\begin{pmatrix} -36 & -37 & -15 \\ 30 & 30 & 14 \\ 26 & 27 & 9 \end{pmatrix}$.

1543. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1544. φ^* es la proyección sobre la bisectriz de los cuadrantes segundo y cuarto paralelamente al eje Oy.

1545. Indicación. Mostrar que si $z \in L_1^*$ y $u \in L_2^*$, $\varphi^* z = 0$, $\varphi^* u = u$.

1547. Indicación. Mostrar que el complemento ortogonal al subespacio unidimensional, invariante a la transformación conjugada φ^*, es invariante con respecto a φ.

1548. Indicación. Utilizando el problema anterior, construir un eslabón de subespacios $R_n \supset L_{n-1} \supset \ldots \supset L_1$, donde L_k es un subespacio k-dimensional, invariante a φ, y aplicar el problema 1355.

1549. $3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$.

1553. Indicación. Examinar las igualdades

$$(\varphi e_i, f_j) = (e_i, \varphi^* f_j) \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

1554. Indicación. Pasar a una base ortonormal.

1555. $A_1 = \begin{pmatrix} 128 & 313 & 454 \\ 36 & 117 & 145 \\ -61 & -197 & -245 \end{pmatrix}$. **1556.** $A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ -5 & -7 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

1557. $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. **1558.** $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & -8 & 7 \\ -7 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1562. Por ejemplo, la transformación φ que convierte el vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dado mediante las coordenadas en una base ortonormal, en un vector $\varphi_x = (|x_1|, x_2, \ldots, x_n)$, conserva los cuadrados escalares, pero no de modo lineal.

Indicación. Para demostrar la afirmación sobre la linealidad de φ mostrar que

$$(\varphi(ax + by) - a\varphi x - b\varphi y, \ \varphi(ax + by) - a\varphi x - b\varphi y) = 0.$$

1563. a) $UA^{-1} = A'U$; b) $U\bar{A}^{-1} = A'U$.

1566. Indicación. Mostrar que existe un vector $x'_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x_i$ (puede ser igual a cero), para el cual $(x'_k, x_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$ y que suponiendo que $y'_k = y_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i y_i$, obtenemos los sistemas de vectores $x_1, \ldots, x_{k-1}, x'_k$ e $y_1, \ldots, y_{k-1}, y'_k$ con las matrices de Gram iguales y emplear el método de la inducción matemática.

1567. Indicación. Emplear el problema 1499.

1569. Solución. a) Si $\varphi z = \lambda z$, $(\varphi z, \lambda z) = \lambda\bar{\lambda}\,(z, z) = (z, z)$, de donde $\lambda\bar{\lambda} = 1$ y $|\lambda| = 1$.

b) Sean $\varphi z_1 = \lambda_1 z_1$, $\varphi z_2 = \lambda_2 z_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Entonces $(z_1, z_2) = (\varphi z_1, \varphi z_2) = \lambda_1\bar{\lambda}_2\,(z_1, z_2)$, de donde, multiplicando por λ_2 y tomando en consideración que $\lambda_1\bar{\lambda}_2 = 1$, encontraremos que $\lambda_1 (z_1, z_2) = \lambda_2 (z_1, z_2)$ y por lo tanto $(z_1, z_2) = 0$.

c) Sean X e Y las columnas de las coordenadas de x e y. Pasando a las coordenadas en la igualdad $\varphi(x+yi) = (\alpha + \beta i)(x+yi)$, obtenemos $AX + AYi = (\alpha X - \beta Y) + (\beta X + \alpha Y) i$, de donde, igualando los miembros reales e imaginarios, hallamos $AX = \alpha X - \beta Y$; $AY = \beta X + \alpha Y$, lo que demuestra las igualdades (1). Multiplicando término por término la primera de las igualdades (1) por sí mismo y aplicando la relación $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, obtenemos $(\varphi x, \varphi x) = (x, x) = (\alpha^2 + \beta^2) | x |^2 = \alpha^2 | x |^2 + \beta^2 | y |^2 - 2\alpha\beta (x, y)$. Multiplicando las igualdades (1), hallamos

$$(\varphi x, \varphi y) = (x, y) = (\alpha^2 + \beta^2)(x, y) = \alpha\beta (| x |^2 - | y |^2) + (\alpha^2 - \beta^2)(x, y).$$

De esta manera, para las magnitudes $| x |^2 - | y |^2$ y (x, y) después de reducir por β, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\beta (| x |^2 - | y |^2) + 2\alpha (x, y) = 0; \quad \alpha (| x |^2 - | y |^2) - 2\beta (x, y) = 0,$$

puesto que el determinante del sistema es distinto de cero,

$$| x |^2 - | y |^2 = 0 \text{ y } (x, y) = 0.$$

d) Si φ tiene un valor propio real, existe un subespacio invariante unidimensional. En caso contrario pasamos al espacio unitario. A saber, tomamos en un espacio unitario R'_n una base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$. Los vectores pertenecientes a R'_n que tienen en esta base coordenadas reales, forman un espacio euclídeo R_n encajado en R'_n. En la base $e_1, \ldots, e_n$ la transformación φ tiene una matriz ortogonal real A. Esta matriz en dicha base define la transformación unitaria φ', coincidente con φ en R_n. La transformación φ' tiene el valor propio $\alpha + \beta i$, donde $\beta \neq 0$. Si $x + yi$ es un vector propio, correspondiente a ésta, y x, y son vectores con coordenadas reales, se cumplen las igualdades (1). Esto significa que el subespacio del espacio R_n tendido sobre los vectores x e y, es invariante con respecto a φ.

1570. a) Para cualquier matriz unitaria A existe una matriz unitaria Q tal que la matriz $B = Q'AQ$ es diagonal con los elementos de la diagonal iguales a la unidad según el módulo.

b) El espacio R_n es una suma directa de los subespacios unidimensionales y bidimensionales ortogonales de dos en dos e invariantes con respecto a φ. La transformación φ deja los vectores de los subespacios unidimensionales invariables o los cambia por los opuestos, y en el subespacio bidimensional provoca un giro en un ángulo γ. Para cualquier matriz ortogonal A existe una matriz ortogonal Q, tal que la matriz $B = Q'AQ$ tiene una forma canónica, indicada en el problema.

Indicación. Utilizar los problemas 1567 y 1569 y aplicar el método de la inducción matemática.

1571. $f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$,

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$;

1572. $f_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1, 1, 0)$

$$f_2 = (0, 0, 1), \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$f_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1, -1, 0)$;

1573. $f_1=\frac{1}{\sqrt{42+28\sqrt{2}}}(-2-\sqrt{2},\ -4-3\sqrt{2},\ \sqrt{2})$,

$f_2=\frac{1}{\sqrt{84}}(6\sqrt{2},\ -2-\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2})$,

$f_3=\frac{1}{\sqrt{84}}(0,\ \sqrt{42-28\sqrt{2}},\ \sqrt{42+28\sqrt{2}})$;

$$B=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2+7\sqrt{2}}{12} & -\frac{\sqrt{42+28\sqrt{2}}}{12} \\ 0 & \frac{\sqrt{42+28\sqrt{2}}}{12} & \frac{-2+7\sqrt{2}}{12} \end{vmatrix}.$$

1574.
$$B=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix},$$

$$Q=\begin{vmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{6} & 0 \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{6} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{vmatrix}.$$

1575. $$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1576. $$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad Q=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

1577. $$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q=\frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1578. $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$. $Q=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}i \\ -\frac{2}{3}i & \frac{1}{3}i & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}i & -\frac{2}{3}i & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

1584. φ es bien una transformación idéntica, bien la simetría con respecto a cierto subespacio L de dimensión $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, es decir, $\varphi x = x$ para cualquier x perteneciente a L y $\varphi x = -x$ para cualquier x perteneciente al complemento ortogonal de L^*.

1585. $f_1=(2/3,\ 2/3,\ 1/3)$,
$f_2=(2/3,\ -1/3,\ -2/3)$, $B=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$.
$f_3=(1/3,\ -2/3,\ 2/3)$;

1586. $f_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$,

$f_2=\left(\frac{1}{\sqrt{18}},\ -\frac{1}{\sqrt{18}},\ -\frac{4}{\sqrt{18}}\right)$, $B=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$.

$f_3=\left(\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$;

1587. $f_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ -i,\ 0)$,

$f_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ i,\ 0)$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$f_3=(0,\ 0,\ 1)$;

1588. $B=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

1589. $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; $C=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2-i & 1 \\ -1 & 2+i \end{pmatrix}$.

1590. **Indicación.** Sea E_{ij} una matriz que tiene en la i-ésima fila y j-ésima columna una unidad y en los demás lugares, ceros. Examinar las matrices de todas las transformaciones en una base ortonormal:

$$E_{11},\ E_{21},\ \ldots,\ E_{n1},\ E_{12},\ E_{22},\ \ldots,\ E_{n2},\ \ldots,\ E_{nn}.$$

1591. a) $U\overline{A} = A'U$; b) $U\overline{A} = A'U$.

1592. Dos formas cuadráticas reales se reducen a la forma canónica mediante la misma transformación ortogonal cuando y sólo cuando, sus matrices son permutables. Dos superficies de segundo grado tienen ejes principales paralelos si, y sólo si, las matrices de los coeficientes de los términos de segundo grado de sus ecuaciones son permutables. **Indicación.** Demostrar que el subespacio L de todos los vectores propios de la transformación φ, pertenecientes a un mismo valor propio λ, será invariante con respecto a la segunda transformación ψ.

1593. Si

$$A_i=\begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \cdots \\ a_{in} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B_i=\begin{pmatrix} b_{i1} \\ b_{i2} \\ \cdots \\ b_{in} \end{pmatrix}$$

($i = 1, 2, \ldots, n$) son columnas que son vectores propios ortonormales de P y Q, respectivamente, n^2 matrices $X'_{ij} = A_i B'_j$ ($i, j = 1, \ldots, n$), donde en la k-ésima fila y l-ésima columna de la matriz X_{ij} se encuentra el producto $a_{ik} b_{jl}$, forman una base ortonormal de vectores propios de las transformaciones φ y ψ, con la particularidad de que cualquier base semejante se obtiene mediante el procedimiento indicado a partir de algunas bases ortonormales de vectores propios de las matrices P y Q.

1594. Si, por ejemplo, la transformación lineal φ del plano en una base ortonormal se da mediante la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y el vector $x = (1, 1)$ se prefija mediante las coordenadas en la misma base que $(\varphi x, x) = -1$.

1595. Indicación. Puede emplearse el problema 1276 c). Es más sencillo examinar las matrices de las transformaciones φ, ψ, χ en la base ortonormal de vectores propios de la transformación χ.

1596. Indicación. La existencia se demuestra lo mismo que en el problema 1276. Es más sencillo demostrar la unicidad, haciendo uso del problema anterior.

1597. Los valores propios de la transformación con la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ son iguales a 3, -1, es decir, los dos no son positivos.

1598. $\begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

1599. $\begin{pmatrix} \frac{5}{2}\sqrt{2} & -\frac{3}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{3}{2}\sqrt{2} & \frac{5}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

1600. $\begin{pmatrix} 14/3 & 2/3 & -4/3 \\ 2/3 & 17/3 & 2/3 \\ -4/3 & 2/3 & 14/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$.

1602. Indicación. Hallar la transformación regular χ tal que $\chi^2 = \varphi$ y mostrar que la transformación $\chi^{-1}\varphi\psi\chi$ es autoconjugada.

1603. Indicación. Sean φ_1 y ψ_1 transformaciones autoconjugadas con valores propios no negativos, tales que $\varphi_1^2 = \varphi$ y $\psi_1^2 = \psi$. Si φ es regular, mostrar, suponiendo que $\chi = \varphi_1\psi_1$, que $\chi\chi^* = \varphi_1^{-1}\varphi\psi\varphi_1$.

1605. Indicación. Examinar la matriz de la transformación en la base de los vectores propios.

1606. Indicación. Examinar una base ortonormal, en la cual la matriz φ es diagonal, y pasar a una base nueva.

1607. Indicación. Mostrar la distributividad de la operación del paso de A y B a C. Examinar las transformaciones lineales φ, ψ, χ prefijadas en cierta base ortonormal de un espacio unitario R_n mediante las matrices A, B, C. Dividir las transformaciones φ y ψ en sumas de transformaciones autoconjugadas no negativas de rango 1 con las matrices $A_1, \ldots, A_r$ y $B_1, \ldots, B_s$. Utilizando el problema 1606, mostrar que la transformación con la matriz (A_i, A_j) en la misma base es no negativa. Por fin, empleando el problema 1604, mostrar que la transformación χ es no negativa.

1609. Indicación. Se demuestra de modo análogo a la propiedad correspondiente de la transformación autoconjugada.

1610. Solución. Las propiedades a) y b) se demuestran de modo análogo a las propiedades correspondientes de la transformación autoconjugada.

Demostración de la propiedad c): sean X e Y las columnas de coordenadas de x e y, respectivamente. Pasando en la igualdad $\varphi(x + yi) = \beta i(x + yi)$ a las coordenadas, obtenemos: $AX + AYi = -\beta Y + \beta Xi$, de donde, igualando

los miembros imaginarios y reales, hallamos: $AX = -\beta Y$, $AY = \beta X$, lo que demuestra la igualdad (1). Como la matriz A es real, para el vector real z el vector φz y el número $(\varphi z, z)$ son reales. Por eso $(\varphi z, z) = (z, -\varphi z) = -(z, \varphi z) = -(\varphi z, z)$ y por lo tanto, $(\varphi z, z) = 0$. Multiplicando por y la segunda de las igualdades (1), hallamos: $\sigma(x, y) = (\varphi y, y) = 0$, de donde $(x, y) = 0$. Multiplicando por y la primera de las igualdades (1) y la segunda, por x, luego sumándolas, obtenemos a causa de que los números $(\varphi y, x) = \beta(x, x)$ son reales, que $\beta(|x|^2 - |y|^2) = (\varphi x, y) + (\varphi y, x) = (\varphi x, y) + (x, \varphi y) = (\varphi x, y) - (\varphi x, y) = 0$, de donde $|x| = |y|$.

Demostración de la propiedad d): si la transformación φ tiene el número 0 como valor propio, existe un subespacio invariante unidimensional. En caso contrario pasamos a un espacio unitario. A saber, tomamos en el espacio unitario R'_n una base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$. Los vectores de R'_n que en esta base poseen coordenadas reales, forman un espacio euclídeo R_n, encajado en R'_n. La transformación φ tiene en la base $e_1, \ldots, e_n$ una matriz antisimétrica real A. Esta matriz en dicha base determina la transformación antisimétrica φ' del espacio unitario R'_n, coincidente con φ en R_n. La transformación φ' tiene el valor propio $\beta i \neq 0$. Si $x + yi$ es el vector propio correspondiente, donde x e y son vectores con coordenadas reales, se cumplen las igualdades (1). Esto significa que el subespacio tendido sobre x e y es invariante.

1611. a) Para cualquier matriz antihermitiana A existe una matriz unitaria Q, tal que la matriz $B = Q^{-1}AQ$ es diagonal con elementos imaginarios puros en la diagonal, algunos de los cuales pueden ser nulos.

b) El espacio es una suma directa de subespacios uni y bidimensionales ortogonales entre sí, que son invariantes con respecto a φ. La transformación φ convierte los vectores de los subespacios unidimensionales en cero, y en el subespacio bidimensional, correspondiente a la célula $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$, origina un giro en un ángulo $\pi/2$ unido con la multiplicación por el número $-\beta$. Para cualquier matriz antisimétrica real A existe una matriz ortogonal real Q, tal que la matriz $B = Q^{-1}AQ$ tiene la forma canónica citada en el texto del problema.

Indicación. Utilizar los problemas 1609 y 1610 y aplicar el método de la inducción matemática.

1614. Si A es una matriz antihermitiana, la matriz $B = (E - A)(E + A)^{-1}$ es unitaria, la cual no posee un número característico igual a -1 y viceversa, si A es una matriz unitaria sin un número característico igual a -1, la matriz $B = (E - A)(E + A)^{-1}$ es antihermitiana. Una relación análoga existe entre las matrices ortogonales y antisimétricas.

Solución. Estudiemos sólo el caso de un espacio unitario. Supongamos que en la igualdad (1) φ es una transformación antisimétrica $(\varphi^* = -\varphi)$. Entonces $\psi^* = (\varepsilon + \varphi^*)^{-1}(\varepsilon - \varphi^*) = (\varepsilon - \varphi)^{-1}(\varepsilon + \varphi) = (\varepsilon + \varphi)(\varepsilon - \varphi)^{-1} = \psi^{-1}$, puesto que $\varepsilon + \varphi$ y $(\varepsilon - \varphi)^{-1}$ son permutables. Esto significa que ψ es unitario. Observemos que $(\varepsilon \pm \varphi)^{-1}$ existen ya que los números ± 1 no son valores propios de φ (problema 1610, punto a)). Prosiguiendo,

$$\varepsilon + \psi = (\varepsilon + \varphi)(\varepsilon + \varphi)^{-1} + (\varepsilon - \varphi)(\varepsilon + \varphi)^{-1} = 2(\varepsilon + \varphi)^{-1}$$

y por lo tanto, ψ no tiene el número -1 como valor propio. Además, φ se expresa a través de ψ mediante la igualdad semejante a la igualdad (1). En efecto, de la igualdad (α) hallamos: $\varepsilon + \varphi = 2(\varepsilon + \chi)^{-1}$, $\varphi = 2(\varepsilon + \psi)^{-1} - \varepsilon = 2(\varepsilon + \chi)^{-1} - (\varepsilon + \psi)(\varepsilon + \psi)^{-1} = (\varepsilon - \psi)(\varepsilon + \psi)^{-1}$. Supongamos lo contrario, en la igualdad (1) φ es una transformación unitaria que no tiene el número -1 como valor propio. Entonces $\psi^* = (\varepsilon + \varphi^*)^{-1}(\varepsilon - \varphi^*) = (\varepsilon + \varphi^{-1})^{-1}(\varepsilon - \varphi^{-1}) = (\varphi + \varepsilon)^{-1}\varphi\varphi^{-1}(\varphi - \varepsilon) = -(\varepsilon - \varphi)(\varepsilon + \varphi)^{-1} = -\psi$, ya que $\varepsilon - \varphi$ y $(\varepsilon + \varphi)^{-1}$ son permutables. Esto significa que ψ es una transformación antisimétrica. Además, φ se expresa a través de ψ mediante la igualdad, semejante a la igualdad (1). Ello se demuestra de nuevo con ayuda de la igualdad (α) textualmente como arriba. Así, pues, la igualdad (1) aplica todas las transformaciones antisimétricas sobre las unitarias que no tienen el número

-1 como valor propio, y viceversa, con la particularidad de que una de estas aplicaciones es opuesta a la otra. Lo dicho demuestra que ambas aplicaciones son biunívocas.

1616. Si la matriz A es antihermitiana (o antisimétrica real), la matriz es unitaria (respectivamente, ortogonal).

1617. Solución. Según el problema 1559, la transformación e^{φ} será autoconjugada. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de φ, ellos son reales y, conforme al problema 1161, los valores propios de e^{φ} serán $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$, es decir, e^{φ} está definida positiva. Mostremos que a diversas transformaciones autoconjugadas φ y φ' les corresponden diferentes transformaciones e^{φ} y $e^{\varphi'}$. Sea $e^{\varphi} = e^{\varphi'}$; φ posee una base ortonormal de vectores propios $a_1, \ldots, a_n$, donde $\varphi a_i = \lambda_i a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Sea a' cualquier vector propio de la transformación φ' con el valor λ';

$a' = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$. Entonces según el problema 1464, $e^{\varphi'} a' = e^{\lambda'} a' = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda'} x_i a_i$.

Por otra parte, $e^{\varphi} a' = \sum_{i=1}^{n} x_i e^{\varphi} a_i = \sum_{i=1}^{n} x_i e^{\lambda_i} a_i$; puesto que $e^{\varphi'} a' = e^{\varphi} a'$, $x_i = 0$ para todos los i tales que para ellos $e^{\lambda_i} \neq e^{\lambda'}$, y $e^{\lambda_i} = e^{\lambda'}$, si $x_i \neq 0$. Como λ_i y λ' son reales, de $x_i \neq 0$ se desprende que $\lambda_i = \lambda'$. Por eso $\varphi a' = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi a_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda' a_i = \lambda' a' = \varphi' a'$. Puesto que φ' posee una base de vectores propios y en ella coincide con φ, $\varphi = \varphi'$. Sea ψ cualquier transformación definida positiva. Existe una base ortonormal en la cual la matriz ψ es diagonal con elementos positivos $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ en la diagonal. Pongamos $\lambda_i = \ln \mu_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, donde λ_i es un valor real del logaritmo, y supongamos que en la misma base la transformación φ se da mediante una matriz diagonal con elementos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ en la diagonal. La transformación φ es autoconjugada y $\psi = e^{\varphi}$.

1625. Indicación. Emplear el problema 1507.

1626. Si r es el rango de φ, la cantidad de tales transformaciones es igual a k^r.

1627. Indicación. Demostrar la igualdad

$$(\varphi x - \lambda x, \varphi x - \lambda x) = (\varphi^* x - \bar{\lambda} x, \varphi^* x - \bar{\lambda} x).$$

1628. Indicación. Emplear el problema anterior.

1629. Indicación. Emplear el problema 1627.

1630. Indicación. Emplear los problemas 1627 y 1629.

1631. Indicación. Emplear varias veces el problema 1629.

1632. Indicación. Al demostrar la necesidad, emplear los dos problemas anteriores. Al demostrar la suficiencia mostrar que la transformación φ de un espacio unitario que posee una propiedad normal, posee una base ortonormada de vectores propios. El caso de un espacio euclídeo reducirlo al del espacio unitario.

1633. Indicación. Emplear el problema anterior.

1634. 1) Sí; 2) sí; 3) sí; 4) sí; 5) no; 6) no; 7) no; 8) sí; 9) no; 10) sí; 11) sí; 12) no; 13) sí; 14) sí; 15) sí; 16) sí; 17) no; 18) sí; 19) no; 20) sí; 21) sí; 22) sí; 23) sí; 24) sí; 25) no; 26) sí; 27) sí; 28) sí; 29) sí; 30) sí; 31) sí; 32) no; 33) no; 34) sí; 35) no; 36) sí.

1637. Indicación. Primer procedimiento: mostrar que $|a| = 1$ para cualquier a del grupo dado G de orden n. Para $n > 1$ coger en G el elemento $b = \cos\psi + i \operatorname{sen}\psi$ con el mínimo argumento positivo ψ y mostrar que

$$G = \{1, b, b^2, \ldots, b^{n-1}\}.$$

Segundo procedimiento: usando el teorema de Lagrange, mostrar que $a^n = 1$ para cualquier a de G.

1638. a) Uno de los grupos es el grupo cíclico de tercer orden con los elementos e, a, b y la tabla

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

En la representación se puede suponer, usando las sustituciones: e, una unidad, $a = (1\ 2\ 3)$, $b = (1\ 3\ 2)$.

b) Dos grupos: 1) grupo cíclico de cuarto orden con los elementos e, a, b, c y la tabla

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

En la representación puede ponerse mediante las sustituciones: e es la unidad, $a = (1\ 2\ 3\ 4)$, $b = (1\ 3)(2\ 4)$, $c = (1\ 4\ 3\ 2)$;

2) el grupo cuádruplo con elementos e, a, b, c y la tabla

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

En la representación puede suponerse mediante las sustituciones: e, una unidad, $a = (1\ 2)(3\ 4)$, $b = (1\ 3)(2\ 4)$, $c = (1\ 4)(2\ 3)$.

c) Dos grupos: 1) el grupo cíclico de sexto orden con los elementos e, a, b, c, d, f y la tabla

	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	b	c	d	f	e
b	b	c	d	f	e	a
c	c	d	f	e	a	b
d	d	f	e	a	b	c
f	f	e	a	b	c	d

En la representación puede suponerse mediante las sustituciones: e, una unidad, $a = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$, $b = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)$, $c = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$, $d = (1\ 5\ 3) \times$ $\times (2\ 6\ 4)$, $f = (1\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2)$;

a) el grupo simétrico de tercer grado con los elementos e, a, b, c, d, f y la tabla

	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	b	e	d	f	c
b	b	e	a	f	c	d
c	c	f	d	e	b	a
d	d	c	f	a	e	b
f	f	d	c	b	a	e

En la representación puede suponerse mediante la sustitución: e, una unidad, $a = (1\ 2\ 3)$, $b = (1\ 3\ 2)$, $c = (1\ 2)$, $d = (2\ 3\ )$, $f = (1\ 3)$.

Indicación. Mostrar que si en el grupo G de orden n hay un conjunto H de k elementos, $k < n$, que de por sí mismo es un grupo para la operación de multiplicación prefijado en G, entonces, multiplicando todos los elementos de H por el elemento x, que no yace en H, obtenemos k nuevos elementos del grupo G. Por eso $k \leqslant \frac{n}{2}$. El conjunto de elementos $e, a, a^2, \ldots, a^{k-1}$, donde $a^k = e$, puede tomarse en calidad de H. Por ejemplo, en el caso c) 2), o sea, para un grupo no cíclico G de sexto orden debe ser $k \leqslant 3$. Si fuese $a^2 = e$ para cualquier a de G, los cuatro elementos e, a, b, ab formarían un grupo, lo que es imposible. Esto significa que existe un elemento a, para el cual $a^2 = b \neq e$, pero $a^3 = e$. Multiplicando los elementos e, a, a^2 por un nuevo elemento c, obtenemos los seis elementos del grupo G en forma de $e, a, a^2 = b, c, ac = d, a^2c = f$. Hay que mostrar que $c^2 = d^2 = f^2 = e$ y $ca = a^2c = f$. Por ejemplo, si fuese $ca = ac$, entonces multiplicando a la izquierda primero por c y luego por a^2, obtenemos: $a^2cac = fd = e$, de donde $fd = d^2$ y $f = d$, lo que es imposible.

1639. El grupo del tetraedro tiene orden 12; el del cubo y octaedro, 24; dodecaedro e icosaedro, 60. **Indicación.** Examinar las rotaciones que transforman el vértice dado A en cierto vértice B (que no es obligatoriamente diferente de A), y mostrar que el orden del grupo es igual a nk, donde n es la cantidad de vértices y k, la cantidad de las aristas que salen de un mismo vértice.

1643. Indicación. A cada elemento x del grupo dado G ponerle en concordancia una aplicación $a \to ax$ para cualquier elemento a perteneciente a G.

1646. ± 1.

1648. Indicación. a) Examinar $(ab)^{p^r}$ y $(ab)^{p^s}$, donde p es el orden de ab. b) Examinar $(ab)^p$, donde p es el orden de ab, y mostrar que $a^p = b^{-p} = e$.

Ejemplo 1. Para los elementos $a \neq e$, $b = a^{-1}$ la condición (1) se cumple, y (2), no. La afirmación b) no se cumple, ya que los órdenes de a y b son iguales entre sí y no son iguales a la unidad y el orden de $ab = e$ es igual a la unidad.

Ejemplo 2. Los elementos $a = (1\ 2)$, $b = (1\ 2\ 3)$ del grupo simétrico S_3 tienen órdenes primos entre sí 2 y 3. La condición (1) no se cumple, ya que $ab = (1\ 3)$, $ba = (2\ 3)$, y (2) se cumple. La afirmación b) no se cumple: a es de orden 2, b de orden 3, ab de orden 2.

c) Ambos miembros de la igualdad $a^k = b^l$ elevarlos a la potencia s, igual a orden b.

d) **Ejemplo 3.** En el grupo cíclico $\{a\}$ de octavo orden los elementos a, a^3, a^5 tienen orden ocho, pero $aa^3 = a^4$ es de orden dos, $aa^5 = a^6$ es de orden cuatro.

1649. 2) y 3) para 1); 4) y 11) para 10); 1), 2), 3), 13), 14) para 8); 15) para 16); 20) y 21) para 18); 20) para 21); 24) para 23); 23) y 24) para 26); 29) y 30) para 31); 34) para 36).

1653. Un grupo cíclico infinito, todos los grupos cíclicos de órdenes primos y un grupo unitario.

1654. a) $G = \{a\}, \{a^2\}, \{a^3\}, \{e\}$; b) $G = \{a\}, \{a^2\}, \{a^3\}, \{a^4\}, \{a^6\}, \{a^8\}, \{a^{12}\}, \{e\}$; c) $G = \{e, a, b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{e\}$;

d) aplicando la anotación de las sustituciones en los ciclos, hallaremos los subgrupos:

$$S_3,\ \{(1\ 2\ 3)\},\ \{(1\ 2)\},\ \{(1\ 3)\},\ \{(2\ 3)\},\ \{e\};$$

e) S_3, $(1\ 2\ 3)$, $\{e\}$ serán los divisores normales.

f) **Indicación.** La descomposición en ciclos de la sustitución de A_4 puede contener sólo ciclos de longitud 1, dos ciclos de longitud 2 o un ciclo de longitud 3. Por eso A_4 no tiene el subgrupo cíclico de sexto orden (véase el problema 1648 a), b)) y todos sus elementos de segundo orden son permutables. Esto significa que A_4 no tiene el subgrupo isomorfo a S_3. Pero cualquier grupo de sexto orden bien es cíclico o bien isomorfo a S_3 (problema 1638 c)).

1655. Eligimos en G cualesquiera elementos: primero $a \neq e$, luego $b \neq e, a$, después $c \neq e, a, b, ab$. Los demás elementos del grupo G serán ab, ac, bc, abc. El grupo G es abeliano (problema 1636). El grupo G tiene los siguientes 16 sub-

grupos: $\{e\}$, $\{e, a\}$, $\{e, b\}$, $\{e, c\}$, $\{e, ab\}$, $\{e, ac\}$, $\{e, bc\}$, $\{e, abc\}$, $\{e, a, b, ab\}$, $\{e, a, c, ac\}$, $\{e, b, c, bc\}$, $\{e, a, bc, abc\}$, $\{e, b, ac, abc\}$, $\{e, c, ab, abc\}$, $\{e, ab, ac, bc\}$, $\{e, a, b, c, ab, ac, bc, abc\} = G$.

1657. En la anotación aditiva todos los subgrupos tienen la forma

$$G_0 = \{a\},\ G_1 = \{pa\},\ G_2 = \{p^2a\},\ \ldots,\ G_{k-1} = \\ = \{p^{k-1}a\},\ G_k = \{p^ka\} = \{0\}.$$

Ellos forman una cadena decreciente de subgrupos de órdenes, respectivamente: p^k, p^{k-1}, p^{k-2}, ..., p, 1.

Indicación. Utilizar el problema 1656 b) o mostrar que el subgrupo $\{sa\}$, donde $0 < s < p^k$, coincide con el subgrupo $\{p^la\}$, donde $s = p^lt$, $0 \leqslant l < k$ y t no se divide por p.

1658. a) **Indicación.** Descomponer la sustitución en ciclos y comprobar que $(i_1i_2i_3\ \ldots\ i_k) = (i_1i_2)\ (i_1i_3)\ \ldots\ (i_1i_k)$.

b) **Indicación.** Comprobar la igualdad $(1\ i)\ (1\ j) = (i\ j)$.

c) **Indicación.** Comprobar que el producto de dos transposiciones se expresa de la siguiente manera mediante los ciclos triples:

$$(i\ j)\ (ik) = (ijk),\ (ij)\ (kl) = (ijk)\ (ilk).$$

d) **Solución.** Sean G un subgrupo de un grupo alternado A_n engendrado por el conjunto de ciclos triples señalados, e i, j, k diferentes números, superiores a dos (para $n = 3$ la afirmación es obvia y para $n = 4$ la demostración citada más abajo se reduce). A la par con el ciclo $(1\ 2\ i)$ el grupo G contiene el elemento inverso $(i\ 2\ 1)$, luego G contiene

$$(1\ 2\ j)\ (1\ 2\ i)\ (j\ 2\ 1) = (1\ i\ j);\ (j\ 2\ 1)\ (i\ 2\ 1)\ (1\ 2\ j) = (2\ i\ j).$$

Para $n = 4$ el grupo G contiene ya todos los ciclos triples. Para $n > 4$ éste contiene $(1\ 2\ k)\ (1\ i\ j)\ (k\ 2\ 1) = (i\ j\ k)$. Esto significa que G posee todos los ciclos triples y según el punto c) coincide con A_n.

1660. Indicación. Sean K un conjunto de todos los elementos del grupo G que no pertenecen a H, y a cualquier elemento de K. Mostrar que al multiplicar a por todos los elementos de H, obtenemos todos los elementos de K. Deducir de aquí que, multiplicando a por todos los elementos de K, obtenemos todos los elementos de H. En particular, a^2 pertenece a H.

1661. Un grupo cuádruplo con elementos e, a, b, c puede servir de ejemplo (véase la respuesta del problema 1638). Este grupo tiene tres subgrupos cíclicos de segundo orden: $\{a\}$, $\{b\}$ y $\{c\}$.

Indicación. Demostrar que al elevar al cuadrado todos los ciclos triples, obtenemos de nuevo todos los ciclos triples, y utilizar los problemas 1658 y 1660.

1662. a) **Indicación.** A cada giro del tetraedro $ABCD$ le corresponde una sustitución de sus vértices. Al producto de dos giros le corresponde el producto de las correspondientes sustituciones. A dos diferentes giros s y t le corresponden dos sustituciones diferentes, ya que de otra manera a un giro no idéntico st^{-1} le correspondría una sustitución idéntica que conservase todos los vértices en su sitio. Conforme a la respuesta del problema 1639, el grupo del tetraedro es isomorfo al subgrupo de duodécimo orden de un grupo simétrico S_4. Prosiguiendo, puede comprobarse bien que todas las sustituciones, correspondientes a los giros del tetraedro, son pares, bien utilizar el problema 1661.

b) **Solución.** Los centros de las caras del octuedro son vértices de un cubo. Por eso los grupos del cubo y octaedro son isomorfos. A cada giro del cubo le corresponde una sustitución de sus cuatro diagonales. Al producto de los giros le corresponde el producto de las correspondientes sustituciones. Examinemos todos los giros del cubo. Es en sí un giro idéntico, ocho giros alrededor de las diagonales en ángulos $2\pi/3$ y $4\pi/3$, seis giros alrededor de los ejes, que pasan a través del punto medio de las aristas opuestas, en un ángluo π y nueve giros alrededor de los ejes que pasan a través de los centros de las caras opuestas, en ángulos $\pi/4$, $2\pi/4$ y $3\pi/4$. La cantidad de estos giros es: $1 + 8 + 6 + 9 = 24$.

Conforme a la respuesta del problema 1639, esta cantidad agota todos los giros del cubo. Mediante una verificación directa nos cercioramos que todas las cuatro diagonales permanecen en su sitio sólo en caso de un giro idéntico. De aquí, lo mismo que en el punto a), deducimos que el grupo del cubo es isomorfo al grupo de sustituciones de los cuatro elementos que tienen el orden 24, es decir, al grupo simétrico S_4.

c) **Solución.** Los centros de las caras del dodecaedro son vértices del icosaedro. Por eso los grupos del dodecaedro e icosaedro son isomorfos. Para cada arista del icosaedro existe una arista paralela y opuesta a ella y dos pares de aristas perpendiculares a ésta: las aristas de un par comienzan en los vértices de las caras, que están contiguas a dicha arista, y las aristas del otro par pertenecen a las caras que tienen como vértices los extremos de la arista dada. Las aristas de uno de estos pares son paralelas y de pares diferentes, son perpendiculares entre sí. Así, pues, todas las 30 aristas se dividen en cinco sistemas por seis aristas en cada sistema. Las aristas de un sistema son bien paralelas, bien perpendiculares, y las aristas de sistemas diferentes no son ni perpendiculares y ni paralelas. Con cada sistema de aristas está unido el octaedro, cuyos vértices sirven de puntos medios de las aristas de dicho sistema. Esto determina los cinco octaedros, inscritos en el icosaedro. A cada giro del icosaedro le corresponde una sustitución de los cinco sistemas de aristas señalados (o de los octaedros, correspondientes a ellos). Al producto de dos giros le corresponde un producto de las sustituciones correspondientes. Examinemos todos los giros del icosaedro. Esto es un giro idéntico; 24 giros alrededor de cada uno de los seis ejes que pasan a través de los vértices opuestos, en ángulos $2\pi/5$, $4\pi/5$, $6\pi/5$ y $8\pi/5$; 20 giros alrededor de cada uno de los diez ejes que pasan a través de los centros de las caras opuestas, en ángulos $2\pi/3$ y $4\pi/3$; 15 giros alrededor de cada uno de los quince ejes que pasan a través de los puntos medios de las aristas opuestas, en un ángulo π. La cantidad de estos giros: $1 + 24 + 20 + 15 = 60$. Según la respuesta del problema 1639, éstos agotan todos los giros del icosaedro. Nos cercioramos mediante una verificación directa que para cada giro no idéntico se encuentra una arista que se transforma mediante el giro dado en otra arista que no es ni paralela, ni perpendicular a la arista dada. Por lo tanto, sólo una sustitución idéntica de los sistemas de aristas le corresponde al giro idéntico. De aquí, lo mismo que en punto a), deducimos que el grupo del icosaedro es isomorfo al subgrupo de orden 60 del grupo simétrico S_5. Conforme al problema 1661, este subgrupo coincide con el grupo alternado A_5.

1668. Indicación. a) Aplicar el problema 1667. b) Mostrar que cada clase contigua contiene precisamente una sustitución que deja el número 4 en su sitio.

1669. Si en la descomposición de dicha sustitución s en ciclos independientes se encuentra k_i ciclos de longitud l_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, con la particularidad que se toman en consideración todos los ciclos incluyendo también los ciclos de longitud 1, la cantidad de sustituciones permutables con la sustitución s, es igual a $\prod_{i=1}^{r} (k_i)! \cdot l_i^{k_i}$. Considerando que $0! = 1$, el número buscado puede escribirse de otra manera. Sea j_i la cantidad de ciclos de longitud i que entran en la descomposición de la sustitución s, donde $i = 1, 2, \ldots, n$ y si en la descomposición no hay ciclos de longitud i, se supone que $j_i = 0$. Entonces el número buscado es igual a $\prod_{i=1}^{n} (j_i)! \cdot i^{j_i}$.

Indicación. Los ciclos de la misma longitud l que entran en la descomposición s, al transformarlos mediante la sustitución de x, permutable con s, pueden sólo permutarse entre sí, con la particularidad de que el primer número de cualquier ciclo puede convertirse en cualquier número de cualquier ciclo de la misma longitud que entra en la descomposición de la sustitución s.

1670. Indicación. Examinar el conmutador $h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1}$ de estos elementos.

1674. Si en la descomposición de dicha sustitución s en ciclos independien-

tes se encuentran k_i ciclos de longitud l_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, con la particularidad de que se toman en consideración todos los ciclos incluyendo también los ciclos de longitud 1, el número buscado es igual a $\frac{n!}{\prod_{i=1}^{r}(k_i)!\cdot l_i^{k_i}}$. Este número puede escribirse de otra manera, empleando otra expresión para el denominador, señalada en la respuesta del problema 1669.

1675. Indicación. a) Designar por a_k la cantidad de clases de elementos conjugados con p^k elementos y, utilizando el problema 1673, mostrar que $a_0 + a_1p + a_2p^2 + \ldots = p^n$.

b) Examinar el grupo $\{Z, a\}$, donde $a \notin Z$.

c) $S_3 \times S_3$. d) El grupo de matrices tipo $\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ sobre el campo Z_p.

1676. Indicación. Si H contiene el ciclo $(\alpha\beta\gamma)$ y α', β', γ' son cualesquiera números distintos desde 1 hasta n, transformar el ciclo $(\alpha\beta\gamma)$ mediante la sustitución $x = \begin{pmatrix}\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon \ldots\\ \alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon' \ldots\end{pmatrix}$, donde δ' y ε' se eligen de modo que la sustitución x es par. Utilizar los problemas 1667 y 1658 c).

1677. Solución. a) Todos los 60 giros que constituyen el grupo del icosaedro, indicados en la respuesta del problema 1662 c). El giro idéntico es la unidad del grupo y forma una clase. Los elementos conjugados tienen el mismo orden. Los elementos de quinto orden son en sí 24 giros en ángulos $2k\pi/5$, $k = 1, 2, 3, 4$ alrededor de cada uno de los seis ejes que pasan a través de los vértices opuestos. Consideraremos como giro alrededor del vértice A en un ángulo α el giro alrededor del eje que pasa a través de A y el vértice opuesto, en un ángulo α en sentido dextrógiro si se mira a lo largo del eje desde A al vértice opuesto. Señalemos para cada vértice uno de los ángulos planos con dicho vértice. Cada giro del icosaedro se caracteriza enteramente con la indicación del vértice B, en el cual se convierte el vértice dado A (B puede coincidir con A) y del ángulo plano de B, en el cual se convierte el ángulo señalado de A. Por eso cada giro de x que transforma A en B, se representa como un producto de $x = yz$, donde y convierte el ángulo señalado de A en el ángulo indicado de B y z es el giro alrededor del vértice B en un ángulo α. El elemento inverso $x^{-1} = z^{-1}y^{-1}$ es el producto del giro z^{-1} alrededor de B en un ángulo $-\alpha$ y del giro y^{-1} que transforma el ángulo señalado de B en el ángulo indicado de A. Sean ahora g el giro alrededor del vértice A en un ángulo α y x, cualquier elemento del grupo que convierte A en B. Representando x en forma de un producto $x = yz$, como se indicó más arriba, hallaremos que el elemento conjugado $x^{-1}gx = z^{-1}y^{-1}gyz$ es de nuevo un giro en un ángulo α, pero ya alrededor del vértice B. En particular, si A y B son vértices opuestos, el giro alrededor de B en un ángulo α coincide con el giro alrededor de A en un ángulo $2\pi - \alpha$. De esta manera, todos los giros alrededor de los vértices en ángulos $2\pi/5$ y $8\pi/5$ pertenecen a una clase de elementos conjugados, lo mismo que todos los giros en ángulos $4\pi/5$ y $6\pi/5$. Mostremos que los giros g_1 y g_2 alrededor del vértice A en ángulos $2\pi/5$ y $4\pi/5$ pertenecen a distintas clases. Si x convierte A en otro vértice B, $x^{-1}g_1x$ es un giro alrededor de B y bien no habrá giro alrededor de A o bien (si B es opuesto a A) será un giro alrededor de A en un ángulo $8\pi/5$, es decir, $x^{-1}g_1x \neq g_2$. Pero si x es el giro alrededor de A, g_1 y x son elementos de un subgrupo cíclico (y, por lo tanto, conmutativo) de giros alrededor de A, y de nuevo $x^{-1}g_1x = g_1 \neq g_2$.

Así, pues, todos los elementos de quinto orden se dividen en dos clases según 12 elementos. Del mismo modo, marcando un ángulo plano de cada cara y un vértice de cada arista, nos cercioramos que 20 elementos de tercer orden (giros en ángulos de $2\pi/3$ y $4\pi/3$ alrededor de los ejes que pasan a través de los centros de las caras opuestas) forman una clase y 15 elementos de segundo orden (giros en un ángulo π alrededor de los ejes que pasan a través del punto medio de las aristas opuestas) también forman una clase.

b) Un divisor normal debe estar compuesto por clases enteras, debe contener la unidad y su orden tiene que dividir el orden 60 del grupo del icosaedro. Según el punto a), las clases de los elementos conjugados contienen, respectivamente, 1, 12, 20, 15 elementos. De estos números pueden componerse sólo dos sumas, incluyendo el sumando 1 y que dividen el número 60, a saber, 1 y 60. Esto nos da sólo dos divisores normales: el subgrupo unitario y todo el grupo.

1678. Indicación. Utilizar el problema 1662 c) y el 1677 b).

1681. El homomorfismo se determina enteramente por la imagen del elemento generatriz a. A continuación indicamos las imágenes posibles de este elemento:

a) cualquier elemento del grupo; el número de los homomorfismos es igual a n;

b) e, b^3, b^6, b^9, b^{12}, b^{15}; c) e, b, b^2, b^3, b^4, b^5; d) e, b^5, b^{10}; e) e.

1683. a) El grupo cíclico $\{\varphi\}$ de cuarto orden, donde $a\varphi = a^2$; b) el grupo cíclico $\{\varphi\}$ de segundo orden, donde $a\varphi = a^5$; e) el cuerpo conmutativo de los residuos según el módulo 5; f) el anillo de los residuos según el módulo 6; g) el anillo de los residuos según el módulo n.

1685. a) El grupo cíclico de orden n; b) el grupo cíclico de orden 5; c) el grupo cíclico de orden 6; d) el grupo cíclico de orden 2.

1688. Indicaciones. En los casos d), e) y h) examinar la aplicación $f(z) = z^n$, y en el caso f) la aplicación $g(z) = z^n/|z|^n$.

1691. En el grupo S_3 el subgrupo $\{(1\ 2)\}$ tiene el índice 3, pero no contiene el elemento $(1\ 3)$ de orden 2.

1693. Indicación. Suponiendo que G/Z es un grupo cíclico, elegir en la clase el elemento a que le sirve de elemento generatriz, y mostrar que a y Z engendran todo el grupo G.

1694. Solución. Apliquemos la inducción según el orden n del grupo G. Para $n = 2$ el grupo G es un grupo cíclico de segundo orden y el teorema es válido para él. Supongamos que el teorema es válido para todos los grupos, cuyo orden es inferior a n, y G es un grupo de orden n. Sea primero G conmutativo. Tomamos cualquier elemento a, distinto de la unidad e del grupo G. Su orden es $k > 1$. Si k se divide por p, $k = pq$, el elemento a^q tiene el orden p. Si k no se divide por p, el orden n' del grupo cociente $G' = G/\{a\}$ del grupo G según el subgrupo cíclico $\{a\}$ es igual a $\frac{n}{k} < n$ y se divide por p. Según la suposición de inducción, G' contiene el elemento b' de orden p. Sea b un elemento del grupo G que entra en la clase contigua b'. De $b'^p = e'$, donde e' es la unidad del grupo G', se desprende que b^p está en el subgrupo $\{a\}$, es decir, $b^p = a^l$, de donde $b^{pk} = a^{lk} = e$. Si $b^k = e$, $b'^k = e'$ y k se divide por el orden p del elemento b', lo que es imposible. Esto significa que $b^{kp} = e$, pero $b^k \neq e$, o sea, el elemento b^k tiene el orden p.

Sea ahora el grupo G no conmutativo. Si existe el subgrupo H, distinto de G, cuyo índice no se divide por p, el orden de H es inferior a n y se divide por p. Conforme a la suposición de la inducción, H contiene el elemento de orden p. Pero si los índices de todos los subgrupos del grupo G distintos de G, se dividen por p, la cantidad de los elementos conjugados de cualquier elemento del grupo G que no entra en su centro Z (problema 1664), se divide por p (problema 1671). Ya que el orden n del grupo G se divide también por p, el orden del centro Z se divide por p y es inferior a n, puesto que G no es conmutativo. Según la suposición de la inducción, Z contiene el elemento de orden p.

1659. Indicación. Hacer uso del problema anterior.

1701. a) $\{a\} = \{3a\} + \{2a\}$;

b) $\{a\} = \{4a\} + \{3a\}$;

c) $\{a\} = \{15a\} + \{20a\} + \{12a\}$;

d) $\{a\} = \{225a\} + \{100a\} + \{36a\}$.

1702. Indicación. En el caso c) utilizar el problema 1700 b).

1703. Indicaciones. a) Tomar en calidad de A y B respectivamente los conjuntos de todos los elementos a y b de G para los cuales $pa = 0$ y $qb = 0$; b) exa-

INDICE

1727. $(5+9\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4})/43$. **Indicación.** Para demostrar la uniformidad utilizar la irreductibilidad del polinomio x^3-2 sobre el campo de los números racionales. Con el fin de hallar el elemento inverso emplear el método de los coeficientes indeterminados.

1728. $x^{-1}=(19-\sqrt[3]{5}+11\sqrt[3]{25})/208$.

1729. **Indicación.** Utilizar la propiedad del polinomio irreductible de ser primo entre sí con cualquier polinomio de grado inferior.

1730. $\beta^{-1}=(101+37\alpha+4\alpha^2)/405$. **Indicación.** Si $\varphi(x)=x^2-x+3$, puede hallarse, aplicando el método de los coeficientes indeterminados, los polinomios $f_1(x)$ de primer grado y $\varphi_1(x)$ de segundo grado que satisfacen la igualdad $f(x)f_1(x)+\varphi(x)\varphi_1(x)=1$ y poner en esta igualdad $x=\alpha$.

1732. Por ejemplo, $f_1(x)=\begin{cases} 0 \text{ para } x\leqslant 0, \\ x \text{ para } x\geqslant 0, \end{cases}$ $f_2(x)=\begin{cases} x \text{ para } x\leqslant 0, \\ 0 \text{ para } x\geqslant 0. \end{cases}$

1734. Los divisores de cero tienen el aspecto $(a, 0)$, donde $a\neq 0$, y $(0, b)$ donde $b\neq 0$.

1737. Las matrices en las cuales el elemento en el ángulo superior izquierdo es distinto de cero, no serán divisores de cero por la izquierda (pero serán por la derecha).

1738. **Indicación.** Suprimir los paréntesis en el producto $(a+b)(e+e)$ mediante dos procedimientos diferentes.

1740. Las matrices de orden $n\geqslant 2$ con elementos de dicho cuerpo conmutativo forman un anillo con varias unidades por la izquierda a condición de que todas las filas, comenzando por la segunda, están compuestas por ceros, y a semejante condición para las columnas, forman un anillo con varias unidades por la derecha.

1742. **Indicación.** Sea a un elemento del anillo distinto de cero. Mostrar que la correspondencia $x\to ax$, donde x es cualquier elemento, es una aplicación biunívoca del anillo dado sobre sí.

1743. **Indicación.** Utilizar el problema 1742.

1747. **Indicación.** Hallar las matrices E, I, J, K, correspondientes a las unidades 1, i, j, k y comprobar la tabla de multiplicación para ellas: $I^2=J^2=K^2=-E$, $IJ=-JI=K$, $JK=-KJ=I$, $KI=-IK=J$.

1749. Son posibles sólo dos de semejantes automorfismos: el idéntico y el que convierte cada número en uno conjugado.

1750. **Indicación.** Mostrar que cualquier campo numérico contiene el número 1, luego los números enteros y, por fin, los fraccionarios.

1751. **Indicación.** Examinar las imágenes de la unidad, de los números enteros y fraccionarios.

1752. **Indicación.** Mostrar que el número positivo como un cuadrado de un número real, se convierte en positivo. Después, empleando el hecho de que entre dos diferentes números reales yace un número racional, y con la conservación de los números racionales, demostrar la constancia de cualquier número real.

1753. Existe la posibilidad de sólo dos aplicaciones semejantes: la idéntica y la que transforma cualquier número complejo en conjugado.

1756. Según el módulo 3 el sistema es incompatible, y según el módulo 5, tiene una solución única $x=2$, $y=3$, $z=2$.

1757. Según el módulo 5 el sistema es imcompatible y según el módulo 7 tiene una solución única $x=2$, $y=6$, $z=5$.

1758. a) $x+2$; b) 1. **1759.** a) 1; b) $5x+1$.

1760. a) x^2+x+2; b) 1.

1761. a) **Solución.** Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ tienen sobre el campo de los números racionales un divisor común $d(x)$ de grado positivo. Entonces $f(x)=a(x)d(x)$, $g(x)=b(x)d(x)$, donde $a(x)$, $b(x)$, $d(x)$ son polinomios con coeficientes racionales. Sacando los denominadores comunes y los máximos comunes divisores de los numeradores de los coeficientes y empleando el lema de Gauss sobre el producto de los polinomios primitivos, obtenemos: $f(x)=$

$= a_1(x)\,d_1(x)$, $g(x) = b_1(x)\,d_1(x)$, donde todos los polinomios tienen coeficientes enteros, el grado de $d_1(x)$ es igual al de $d(x)$ y el coeficiente mayor de $d_1(x)$ no se divide por p. Pasando hacia el campo de residuos según el módulo p, obtenemos el común divisor de grado positivo para $f(x)$ y $g(x)$ sobre este campo, lo que es imposible.

b) Los polinomios $f(x) = x$, $g(x) = x + p$ son primos entre sí sobre el campo de los números racionales y son iguales a x, es decir, no son primos entre sí sobre el campo de los residuos según el módulo p.

1762. Indicación. Si $f(x)$ y $g(x)$ son primos entre sí, obteniendo la igualdad $f(x)\,u(x) + g(x)\,v(x) = c$, donde $u(x)$, $v(x)$ son polinomios con coeficientes enteros y c es un número entero, demostrar que $f(x)$ y $g(x)$ son primos entre sí sobre el campo de los residuos según cualquier p primo que no divida c. Al demostrar la afirmación inversa, utilizar el problema 1761.

1763. $(x+1)^3(x^2+x+1)$. **1764.** $(x+3)(x^2+4x+2)$.

1765. $(x^2+1)(x^2+x+2)$. **1766.** $(x^2+x+1)(x^2+2x+4)$.

1767. $f_1 = x^2$, $f_2 = x^2+1 = (x+1)^2$, $f_3 = x^2+x = x(x+1)$, $f_4 = x^2+x+1$ es irreductible.

1768. $f_1 = x^3$, $f_2 = x^3+1 = (x+1)(x^2+x+1)$, $f_3 = x^3+x = x(x+1)^2$, $f_4 = x^3+x^2 = x^2(x+1)$, $f_5 = x^2+x+1$ es irreductible, $f_6 = x^3+x^2+1$ es irreductible, $f_7 = x^3+x^2+x = x(x^2+x+1)$, $f_8 = x^3+x^2+x+1 = (x+1)^3$.

1769. $f_1 = x^2+1$, $f_2 = x^2+x+2$, $f_3 = x^2+2x+2$.

1770.
$$\begin{aligned} f_1 &= x^3+2x+1, & f_5 &= x^3+x^2+x+2,\\ f_2 &= x^3+2x+2, & f_6 &= x^3+x^2+2x+1,\\ f_3 &= x^3+x^2+2, & f_7 &= x^3+2x^2+x+1,\\ f_4 &= x^3+2x^2+1, & f_8 &= x^3+2x^2+2x+2. \end{aligned}$$

1771. Indicación. Empleando el lema de Gauss, obtener de la descomposición $f(x)$ en dos factores con coeficientes racionales la descomposición en dos factores con coeficientes enteros. El polinomio $f(x) = px^2 + (p+1)x + 1 = (px+1)(x+1)$ se reduce sobre el campo de los números racionales, pero según el módulo p es igual a $x+1$ y, por lo tanto es irreductible.

1772. Solución. Sean n el orden del grupo G y m el mínimo común múltiplo de los órdenes de todos sus elementos. Entonces m divide n y $g^m = 1$ para todos los $g \in G$. Pero la ecuación $x^m = 1$ en el campo P no puede tener más de m soluciones. Esto significa que $m = n$. Sea $n = p_1^{k_1}, \ldots, p_2^{k_s}$ es la descomposición de n en el producto de las potencias de diferentes números primos, mientras que para cada $i = 1, \ldots, s$ en el gurpo G existe el elemento h_i de orden $p_i^{k_i}q_i$. El elemento $g_i = h_i^{q_i}$ tiene el orden $p_i^{k_i}$. Según el problema 1648 a) el elemento $g = g_1, \ldots, g_s$ tiene el orden n y es la generatriz del grupo G.

1773. Solución. Primero demostremos el lema de la teoría de los grupos. Si dos elementos a y b del grupo cíclico G no son cuadrados, su producto es cuadrado.

El conjunto H de elementos de G que son cuadrados, es subgrupo. El grupo cociente G/H es cíclico. Si $C = cH$ es su generatriz, de $c^2 \in H$ se deduce que $C^2 = c^2H = H$. Esto significa o que $H = G$ o G/H es un grupo de segundo orden y $ab \in aH \cdot bH = H$, es decir, ab es cuadrado.

De aquí se deduce que según cualquier módulo primo p uno de los números 2, 3, 6 es comparable con el cuadrado. En efecto, para $p = 2$ tenemos $2 \equiv 0^2$, para $p = 3$ también $3 \equiv 0^2$. Si $p > 3$, 2 y 3 pueden considerarse como elementos de un grupo multiplicativo G del campo de residuos según el módulo p. De acuerdo con el problema 1772, el grupo G es cíclico, y según el lema, demostrado más arriba, si 2 y 3 no son cuadrados, $2 \cdot 3 = 6$ es cuadrado.

El polinomio

$$f(x) = (x - \sqrt{2} - \sqrt{3})(x - \sqrt{2} + \sqrt{3})(x + \sqrt{2} - \sqrt{3})(x + \sqrt{2} + \sqrt{3}) = \\ = x^4 - 10x^2 + 1$$

es irreductible sobre el campo de los números racionales, ya que los factores lineales y sus productos de dos en dos no son polinomios con coeficientes racionales.

Sea Z_p un campo de residuos según el módulo primo p. Según lo demostrado, existe un elemento $a \in Z_p$, para el cual $a^2 = 2$ ó $a^2 = 3$, ó $a^2 = 6$. Si $a^2 = 2$, $x^4 - 10x^2 + 1 = (x^2 + 2ax - 1)(x^2 - 2ax - 1)$; si $a^2 = 3$, $x^4 - 10x^2 + 1 = (x^2 + 2ax + 1)(x^2 - 2ax + 1)$; si $a^2 = 6$, $x^4 - 10x^2 + 1 = (x^2 - 5 + 2a) \times (x^2 - 5 - 2a)$.

1774. Indicación. Mostrar que si $a = ae$, e es una unidad.

1775. a) $a = p$ en el anillo de los residuos según el módulo p^2; b) $a = p$ en el anillo de los residuos según el módulo p^n. Aquí p es cualquier número mayor que 1.

1779. Indicación. Para el número $z = a + b\sqrt{-3}$ introducir la norma $N(z) = z \cdot \bar{z} = a^2 + 3b^2$. Demostrar que $N(z_1 \cdot z_2) = N(z_1) N(z_2)$, para dicho $M > 0$ existe sólo un conjunto finito de números z con $N(z) < M$, los divisores de la unidad son sólo ± 1, el divisor de z con la mínima norma superior a 1 es primo.

1780. Indicación. Mediante la transformación de la indeterminada, convertir el elemento ininvertible en un polinomio de grado superior a dos.

1781. a) Ideal; b) subanillo; c) ideal; d) no es subgrupo de un grupo aditivo; e) subanillo; f) subgrupo de un grupo aditivo; g) ideal; h) subanillo; i) ideal; j) ideal; k) no es subgrupo de un grupo aditivo.

1785. Indicación. Mostrar que cualquier ideal I se engendra mediante su elemento a, distinto de cero y mínimo en el sentido siguiente: a) según su valor absoluto; b) según la potencia; c) según el módulo. En cada caso utilizar la existencia de la división inexacta por el elemento $b \neq 0$, con la particularidad de que el resto o bien es igual a cero o es inferior al divisor en el sentido indicado más arriba.

1791. Si $ne \neq 0$ para cualquier $n \neq 0$ de Z, φ es un isomorfismo y $\varphi(Z)$ es isomorfo con respecto a Z. Si $ne = 0$ para cierto $n \neq 0$ de Z y n_0 es el número positivo mínimo, para el cual $n_0 e = 0$, $\varphi(Z)$ es isomorfo al anillo de los residuos según el módulo n_0.

1792. b) Cuatro clases contiguas que constan de los números $a + bi$ con propiedades: 1) a y b son pares; 2) a es par y b, impar; 3) a es impar y b par; 4) a y b son impares; c) la clase B que contiene $1 + i$, es divisor de cero, con la particularidad de que $B^2 = 0$.

1799. La cantidad de elementos es igual a p^n.

1800. 1. R es un anillo con divisores de cero considerado como un módulo sobre sí mismo, λ y a son divisores de cero para los cuales $\lambda a = 0$. 2 $G = \{a\}$ es un grupo cíclico de orden n (con anotación aditiva de las operaciones), considerada como un módulo sobre el anillo de los números enteros. Entonces $na = 0$.

1804. Indicación. Emplear el problema 1647 c).

1807. b) Sean a y b dos elementos diferentes de segundo orden de un grupo cuádruplo (véase la respuesta del problema 1638 b)). Si se examina este grupo en calidad de un módulo unitario sobre el anillo de los números enteros (para una multiplicación corriente de los elementos del grupo por números), $O(a)$ y $O(b)$ coinciden con el conjunto de los números pares pero $\{a\} \neq \{b\}$.

1808. Indicación. Demostrar que el conjunto I de todos los $\lambda \in R$, para los cuales $\lambda a \in A$, es el ideal del anillo R.

1809. El conjunto A de todos los elementos con un número finito de componentes no nulas.

1810. b) **Ejemplo 1.** En el anillo Z_6 de los residuos según el módulo 6 como módulo sobre sí mismo, los elementos 2 y 3 son periódicos y su suma 5 no es elemento periódico.

Ejemplo 2. Sea R un anillo de pares (x, y), donde x e y son números enteros, y la adición y multiplicación de los pares se realiza mediante las componentes (problema 1734). Los elementos $a = (1, 0)$ y $b = (0, 1)$ son divisores de cero. Si R se considera como módulo sobre sí mismo, a y b serán elementos periódicos, ya que $O(a)$ es el conjunto de todos los pares tipo $(0, y)$ y $O(b)$, de todos los pares tipo $(x, 0)$. Pero el elemento $a + b = (1, 1)$ tiene en calidad de orden el elemento nulo $(0, 0)$.

1811. Indicación. Poner $\alpha = \alpha'\delta$, $\beta = \beta'\delta$ y mostrar que $\alpha'\beta'\delta(a + b) \neq 0$ y $\alpha\gamma b = 0$.

1812. Indicación. Mostrar que M es una suma directa de los submódulos no nulos M_i, cada uno de los cuales consta de todos los elementos M, cuyos órdenes están engendrados mediante las potencias de un elemento primo p_i de R.

1813. Indicación. Examinar la unión de los módulos M_i.

1819. Indicación. Mostrar que $b \to A + b$ es una aplicación homomorfa de B sobre $(A + B)/A$ y emplear el teorema sobre los homomorfismos para los módulos.

1820. Indicación. Emplear la inducción según n. Para $n = 1$ emplear los problemas 1815 y 1818. Para $n > 1$ suponer que en M existe una cadena creciente infinita de distintos submódulos $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$, y poner $A = \{x_1\}$, $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$, $M_i' = M_i \cap A$ y mostrar que la cadena M_i' se estabiliza en cierto $M_k' = A \cap B$. Después aplicar el teorema sobre el isomorfismo (véase el problema 1819) y usar el hecho de que el módulo cociente M/A tiene $n - 1$ generatrices.

1822. Indicación. Al demostrar b) exaimnar la expresión $(1 + 1)(x + y)$.

1823. c) El espacio V es de dimensión infinita.

1825. Indicación. Demostrar por inducción o suponer que en la relación lineal $x = 1, 2, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$.

1826. Indicación. En los casos c), d), e) diferenciar dos veces y emplear la inducción.

1827. Indicación. Utilizar el determinante de Vandermonde.

1829. La dimensión es igual a $C_{k+n-1}^{n-1} = C_{k+n-1}^{k}$. **Indicación.** En calidad de base tomar todos los monomios y a cada uno de ellos tipo $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ ponerles en correspondencia la fila

$$\underbrace{1\ \ldots\ 1}_{\alpha_1 \text{ veces}} x_1 \underbrace{1\ \ldots\ 1}_{\alpha_2 \text{ veces}} x_2 \ldots \underbrace{1\ \ldots\ 1}_{\alpha_n \text{ veces}} x_n$$

1830. C_{k+n}^{n}. **Indicación.** Poner $x_i = \dfrac{y_i}{y_{n+1}}$ y reducirlo al problema anterior.

1831. b) La dimensión de L es igual a n; c) la dimensión de L_k es igual a $n - k + 1$; d) L' no es un subespacio.

1832. Indicación. Al demostrar la necesidad obtener la igualdad $B = CA$, donde C es una matriz regular de los coeficientes en las expresiones del sistema (2) a través de (1). Al demostrar la suficiencia anotar a la matriz A por debajo una fila de coordenadas del vector b_i y, calculando el rango mediante el método de rebordeamiento, mostrar que el rango de la matriz obtenida es igual a k.

1836. d) Sean en el plano xOy $L = Ox$, $M = Oy$, L' cualquier recta que pasa a través del origen de las coordenadas y diferentes de los ejes, φ_1, la proyección sobre L paralelamente a M, φ_2, la proyección sobre L' paralelamente a M. Entonces $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_1 \neq \varphi_2 = \varphi_2\varphi_1$. La condición (3) no se cumple, pero $\varphi_1\varphi_2$ y $\varphi_2\varphi_1$ son proyecciones.

Indicaciones. b) Mostrar que si φ_1 y φ_2 son idempotentes, $\varphi_1 + \varphi_2$ son idempotentes cuando, y sólo cuando, $\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2\varphi_1 = 0$. Multiplicando esta igualdad a la derecha y a la izquierda por φ_1, demostrar su equivalencia a la condición (1).

c) Utilizando a), reducir c) a b). d) De $\varphi_1\varphi_2 x = x$, deducir $\varphi_1 x = \varphi_2 x = x$. Luego usar la representación $x = \varphi_2 x + (\varepsilon - \varphi_2) x$.

1837. Indicación. Examinar $(\varphi(x_1 + x_2), y)$ y $(\varphi(\lambda x, y))$.

1838. $\frac{1}{5}\sqrt{10}$.

1839. Si L es un subespacio de todos los vectores, en cada uno de los cuales sólo una cantidad finita de coordenadas es distinta de cero, $L^* = 0$, $L \dotplus L^* = L \neq V$, $(L^*)^* = V \neq L$.

1841. Sea A una matriz de transformación en una base ortonormal. a) El giro del plano en cierto ángulo alrededor del origen de coordenadas si $|A| = +1$; una reflexión especular del plano en cierta recta que pasa a través del origen de coordenadas si $|A| = -1$; b) El giro del espacio en un ángulo alrededor del eje que pasa a través del origen de coordenadas si $|A| = +1$; el giro señalado antes, con una reflexión especular posterior del espacio en el plano que pasa a través del origen de coordenadas y perpendicular al eje de rotación si $|A| = -1$.

1842. El giro alrededor del eje, definido por el vector $f(1, 1, 0)$, en un ángulo $\alpha = 60°$ en sentido negativo. **Indicación.** Buscamos el vector f como un vector propio que pertenece al valor propio 1. El ángulo de giro α lo hallamos de la condición $2\cos\alpha + 1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$, que se obtiene de la invariación de la traza de la matriz de transformación φ. Para determinar la dirección del giro tomamos un vector que no yace en el eje de rotación, por ejemplo e_1, su imagen φe_1 y el vector del eje f, y buscamos el signo del determinante a partir de las coordenadas de estos tres vectores, es decir, la orientación del trío de vectores e_1, φe_1, f.

1843. a) La transformación nula; b) el giro en un ángulo $\pi/2$ en sentido positivo o negativo con la posterior multiplicación por un número no negativo; c) $\varphi x = a \times x$. Para $a \neq 0$ la transformación φ se reduce a la proyección del vector x sobre el plano, perpendicular al vector a, al giro alrededor de a en un ángulo $\pi/2$ en sentido positivo y multiplicación por la longitud a. **Indicación.** Examinar la matriz de la transformación φ en una base ortonormal

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$ y poner $a = (a_1, a_2, a_3)$, donde $a_1 = -a_{23}$, $a_2 = -a_{31} = a_{13}$, $a_3 = -a_{12}$.

1844. Indicación. Al demostrar la suficiencia examinar el producto escalar $(\alpha(x + y), x + y)$.

1845. Indicación. Hallar la base $e_1, e_2, \ldots, e_n$, para la cual $l(e_1) = 1$, $l(e_2) = \ldots = l(e_n) = 0$.

1848. Indicación. Suponer que $l_1(a) \neq 0$, $l_2(b) \neq 0$, y examinar el vector $a + b$.

1849. Indicación. Demostrar que si $b(x, y) \neq 0$,

$$\frac{l_1(x)}{l_2(x)} = \frac{l_1(y)}{l_2(y)} = \lambda \neq 0.$$

Examinar el producto $(l(x) - \lambda l_2(x))\, l_2(x)$ y emplear el problema 1848.

1850. Indicación. Emplear los problemas 1846 y 1849.

1851. Indicación. Emplear el problema 1848.

1852. Indicación. Suponer que $y = x - \frac{l(x)}{l(a)} \cdot a$.

1853. Indicación. Para las funciones no nulas tomar el vector a no yacente en S, poner $\lambda = \frac{l_1(a)}{l_2(a)}$ y emplear el problema 1852 b).

1854. a) Hiperboloide de una hoja; b) hiperboloide de dos hojas. **Indicación.** Pasar a las coordenadas homogéneas.

1856. Si $e_1, \ldots, e_n$ es una base normal (en la cual $f(x)$ se escribe mediante una forma cuadrática de tipo normal), con la particularidad de que $f(e_i) = 1$ ($i = 1, 2, \ldots, p$), $f(e_j) = -1$ ($j = p+1, \ldots, r$); $f(e_k) = 0$ ($k = r + 1, \ldots, n$), entonces en calidad de la base buscada puede tomarse, por ejemplo,

$$f_i = e_i + e_{p+1} \; (i = 1, \ldots, p); \; f_j = -e_p + e_j \; (j = p+1, \ldots, r); \; f_k = e_k \; (k = r+1, \ldots, n).$$

Indicación. Demostrar que los vectores

$$f_{ij} = e_i + e_j \; (i = 1, \ldots, p, \; j = p+1, \ldots, r),$$

$$g_{ij} = e_i - e_j \; (i = 1, \ldots, p; \; j = p+1, \ldots, r);$$

$h_k = e_k$ ($k = r+1, \ldots, n$) son isótropos y la base $e_i, \ldots, e_n$ se expresa mediante ellos.

1857. **Indicación.** Utilizar los problemas 1306 y 1856.

1858. **Indicación.** Examinemos el caso b) con la condición $p \leqslant q$. Tomando la escritura $f(x) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2$ como forma de tipo normal, comprobar que K contiene el subespacio L, prefijado mediante las ecuaciones

$$x_1 - x_{p+1} = 0, \ldots, x_p - x_{2p} = 0, \; x_{2p+1} = 0, \ldots, x_{p+q} = 0, \qquad (1)$$

con la particularidad de que la dimensión L es igual a $n - q$. Después suponer que K contiene el subespacio L' de dimensión $s > n - q$, prefijado mediante las ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-s), \qquad (2)$$

añadir a ellas las ecuaciones

$$x_1 = 0, \ldots, x_p = 0, \; x_{p+q+1} = 0, \ldots, x_n = 0 \qquad (3)$$

y llegar a una contradicción.

1859. a) **Solución.** Si $f(x)$ se escribe en una base adecuada en forma normal, la ecuación de la superficie S se escribirá del siguiente modo:

$$x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_n^2 = 1. \qquad (1)$$

Si $p = 0$, en S no hay puntos reales. En este caso mín $(p - 1, q) = -1$. El teorema es válido si se considera la dimensión de un conjunto vacío igual a -1.

Supongamos que $p > 0$. Entonces en S hay puntos, por ejemplo, $(1, 0, \ldots, 0)$, es decir, variedades de dimensión cero. Sea P una variedad de dimensión máxima k que entra en S. P se da mediante un sistema de $n - k$ ecuaciones linealmente independientes

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-k). \qquad (2)$$

Este sistema no puede ser homogéneo ya que la solución nula no satisface la ecuación (1). Con el fin de simplificar, supongamos que el determinante d de orden $n - k$ de los coeficientes de las primeras $n - k$ incógnitas es distinto de cero. Entonces la solución general del sistema (2) puede escribirse de este modo:

$$x_i = c_{i,n-k+1}x_{n-k+1} + \ldots + c_{in}x_n + c_{i,n+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-k). \qquad (3)$$

Examinemos un espacio $(n+1)$-dimensional V_{n+1}. Tomemos en él cualquier base y consideraremos que V_n está tendido sobre los primeros n vectores de la base.

Examinemos un sistema homogéneo de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i x_{n+1} = 0 \quad (i=1, 2, \ldots, n-k); \tag{4}$$

los coeficientes son los mismos que en (2). Su solución general tiene el aspecto

$$x_i = c_{i\,n-k+1}x_{n-k+1} + \ldots + c_{in}x_n + \\ + c_{i\,n+1}x_{n+1} \ (i=1, 2, \ldots, n-k) \tag{5}$$

con los mismos coeficientes que en (3).

Después examinemos un cono K prefijado por la ecuación

$$x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_n^2 - x_{n+1}^2 = 0. \tag{6}$$

Demostremos que el subespacio $(k+1)$-dimensional L, dado mediante el sistema (4), yace en el cono K. Cualquier solución del sistema (4) en la cual $x_{n+1} = 1$, después de omitir x_{n+1} nos da la solución del sistema (2), es decir, el vector de $P \subset S$. Pero semejante solución satisface la ecuación (6) y, por lo tanto, yace en K.

Si x es cualquier solución del sistema (4), en el cual $x_{n+1} = \alpha \neq 0$, $\frac{1}{\alpha}x \in K$, de donde $x \in K$. Sea $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k}, \alpha_{n-k+1}, \ldots, \alpha_n, 0)$ la solución del sistema (4) con $x_{n+1} = 0$. Existe una solución x^l del sistema (4), en el cual las incógnitas libres tienen valores:

$$x_{n-k+1} = \alpha_{n-k+1}, \ \ldots, \ x_n = \alpha_n, \quad x_{n+1} = \frac{1}{l} \quad (l=1, 2, \ldots).$$

De las fórmulas (5) queda claro que $\lim\limits_{l\to\infty} x^l = x$. Según lo demostrado más arriba, $x^l \in K$. Pasando en la ecuación (6) al límite para $l \to \infty$, después de sustituir en ella las coordenadas x^l, obtenemos $x \in K$.

Así, pues, $L \subset K$. Los índices de inercia de K son iguales a p, $q+1$. Conforme al problema 1858, $k+1 \leqslant \text{mín}\,(p, q+1)$, de donde $k \leqslant \text{mín}\,(p-1, q)$.

Sea K' un cono con la ecuación

$$\pm x_2^2 \pm \ldots - x_{p+1}^2 - \ldots - x_n^2 = 0, \tag{7}$$

donde los signos coinciden con los de los correspondientes términos de la ecuación (1). Según el problema 1858, el cono K' contiene un subespacio L' de dimensión $k = \text{mín}\,(p-1, q)$, que yace en el subespacio con ecuación $x_1 = 0$. Tomemos en V_n un vector $a_0 = (1, 0, \ldots, 0)$. Entonces S contiene la variedad $P' = a_0 + L'$ de dimensión $k = \text{mín}\,(p-1, q)$. La afirmación a) está demostrada.

b) **Indicación.** Para $r < n$ reducir b) a a) en un espacio r-dimensional.

1860. a) 1; b) 0; c) 1; d) 0; e) 1; f) 1; g) $n-1$; h) $n-2$; i) 0; j) 1 si $n > 2$, 0 si $n = 2$; k) 1; l) la parte entera de $\frac{n-1}{2}$ ó $\frac{1}{2}n - 1$ si n es par; $\frac{1}{2}(n-1)$ si n es impar.

1861. b) **Indicación.** Hallar los sistemas de ecuaciones lineales que prefijan el núcleo derecho y el izquierdo.

1862. La base L_0' forma un vector $(3, -1)$ y la base L_0'', el vector $(2, -1)$.

1863. b) **Indicación.** Sea $1 < r \leqslant n$. Tomar una función cuya matriz en cierta base tiene en el ángulo superior izquierdo una célula regular cuadrada de orden r que no es ni simétrica, ni antisimétrica, y en los demás lugares tiene ceros.

1864. *Indicación.* Utilizar el subespacio nulo de la función $b(x, y)$.

1865. Indicación. Mostrar que las coordenadas de todos los vectores de L^* satisfacen la ecuación matricial $BAY = 0$, donde A es la matriz $b(x, y)$ en cierta base del espacio V_n, B es la matriz, por cuyas filas se encuentran las coordenadas de cualquier base del subespacio L en la base dada de V_n, Y, la columna de coordenadas del vector $y \in L^*$ en la misma base.

1866. Primera demostración. Puesto que $b(x, y) \neq 0$, pero $b(x, x) \equiv 0$, existen los vectores x_1, x_2 tales que $b(x_1, x_2) \neq 0$. Multiplicando uno de esos vectores por $\frac{1}{b(x_1, x_2)}$ obtenemos los vectores e_1, e_2, para los cuales $b(e_1, e_2)=1$. Los vectores e_1, e_2 son linealmente independientes, ya que si $e_2 = \alpha e_1$, $b(e_1, e_2) = \alpha\, b(e_1, e_2) = 0$. Sean L_1 un subespacio bidimensional tendido sobre e_1, e_2 y L_2 un conjunto de todos los $y \in V_n$ tales que $b(x, y) = 0$ para cualquier $x \in L_1$. Conforme al problema 1865, L_2 es un subespacio de dimensión $\geqslant n-2$. La intersección de L_1 y L_2 contiene sólo el vector nulo, puesto que si $x \in L_1$, $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$. Si $x \in L_2$, $b(e_1, x) = b(e_2, x) = 0$ y $b(e_1, e_1) = b(e_2, e_2) = 0$; $b(e_1, e_2) = -b(e_2, e_1) = 1$, de donde $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $x = 0$. Según el problema 1296, la dimensión de L_2 es igual a $n-2$ y V_n es una suma directa de L_1 y L_2. Además, si en L_2 $b(x, y) \neq 0$, entonces, como antes, existen los vectores $e_3, e_4 \in L_2$, para los cuales $b(e_3, e_4) = 1$, etc. Después de una cantidad finita de pasos, llegaremos al subespacio L_{k+1}, en el cual $b(x, y) \equiv 0$. Si L_{n+1} es no nulo, tomamos en él cualquier base $e_{2k+1}, \ldots, e_n$. Los vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n$ forman la base buscada.

Segunda demostración[1]. Esta demostración nos da un método práctico para hallar una transformación lineal regular de las incógnitas que reducen la forma bilineal dada a la forma canónica, señalada en el problema.

Sea en cierta base $b(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$. A causa del cambio de numeración de las incógnitas, puede considerarse $a_{12} \neq 0$. Escribamos la forma como

$$b(x, y) = x_1(a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n) - y_1(a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) + b_1(x, y)$$

y realicemos una transformación regular de las incógnitas

$$x_1' = x_1,\quad x_2' = a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n,\quad x_3' = x_3, \ldots, x_n' = x_n$$

y semejante transformación para y_i. Obtenemos

$$b(x, y) = x_1'y_2' - x_2'y_1' + b_2(x, y).$$

Si $b_2(x, y)$ no contiene x_2', y_2', hacemos con ella lo mismo. De lo contrario, $b_2(x, y) = \sum_{i,j}^{n} a_{ij}'x_i'y_j'$, donde $a_{2k}' \neq 0$ para cierto k, $2 \leqslant k \leqslant n$. Después de efectuar la transformación regular de las incógnitas

$$x_1'' = x_1' - a_{23}'x_3' - \ldots - a_{2n}'x_n',\quad x_2'' = x_2', \ldots, x_n'' = x_n'$$

y la misma transformación y_i', obtenemos $b(x, y) = x_1''y_2'' - x_2''y_1'' + b_3(x, y)$, donde $b_3(x, y)$ no contiene x_1'', x_2'', y_1'', y_2''. Si $b_3(x, y) \neq 0$, hacemos con ella lo mismo.

1867. $b(x, y) = u_1v_2 - u_2v_1 + u_3v_4 - u_4v_3$; $u_1 = x_1 + 3x_4$, $u_2 = x_2 + 2x_3 - x_4$, $u_3 = x_3$, $u_4 = 6x_4$ y la misma expresión de v_i a través de y_i.

1868. $b(x, y) = u_1v_2 - u_2v_1 + u_3v_4 - u_4v_3$; $u_1 = x_1 - 4x_4$, $u_2 = x_2 + 2x_3$, $u_3 = x_3$, $u_4 = -8x_4$ y una expresión análoga para v_i a través de y_i.

1869. En el lenguaje matricial obtenemos la afirmación: para que una matriz simétrica real A sea semejante ortogonalmente a la matriz, en la cual todos

[1] A. I. Máltsev. Fundamentos de álgebra lineal. Editorial Mir, Moscú, 1978.

los elementos de la diagonal principal son nulos, es necesario y suficiente que la traza de A sea nula.

Indicación. Para demostrar la suficiencia emplear la inducción según n. Para $n > 1$ tomar cualquier base ortonormal $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Si ésta no yace en el cono, mostrar que existen vectores f_i, f_j, para los cuales $f(f_i) > 0$, $f(f_j) < 0$, y tomar como primer vector de la base buscada el vector e_1, obtenido al normalizar el vector $f_i + \lambda f_j$, donde λ se halla de la condición $f(f_i + \lambda f_j) = 0$.

1870. Indicación. Aplicar la propiedad: cuatro puntos diferentes forman un paralelogramo cuando, y sólo cuando, sus radios vectores satisfacen la condición $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$.

1875. $x_1 = -1 + 3t_1 - 4t_2$, $x_2 = 2 - t_1 + t_2$, $x_3 = t_1$, $x_4 = t_2$.

1876. $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2$, $x_2 = t_1$, $x_3 = 3 - 4t_2$, $x_4 = 0$, $x_5 = t_2$.

1877. $3x_1 - x_2 - x_3 = 8$, $x_1 - 2x_2 + x_4 = 3$, $5x_1 - 2x_2 - x_5 = 7$.

1878. $x_1 - 4x_2 + x_3 + 2 = 0$, $2x_1 - 3x_2 - x_4 + 7 = 0$, $3x_1 - 5x_2 - x_5 + 8 = 0$.

1882. Sean r y r' respectivamente los rangos de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A' = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix};$$

r_{ij} y r'_{ij} respectivamente los rangos de las matrices de las filas i-ésima y j-ésima de las matrices A y A'.

Son posibles los cinco casos siguientes, para los cuales son necesarios y suficientes los valores señalados de los rangos:

1) tres planos pasan a través de un punto: $r = r' = 3$;

2) tres planos no tienen puntos comunes, pero se intersecan de dos en dos originando rectas (forman un prisma): $r = r_{12} = r_{13} = r_{23} = 2$, $r' = 3$;

3) dos planos son paralelos y el tercero los corta: $r_{12} = 1$, $r = r'_{12} = r_{13} = r_{23} = 2$, $r' = 3$ y dos casos análogos;

4) tres planos pasan a través de una recta: $r = r_{12} = r_{13} = r_{23} = r' = 2$;

5) tres planos paralelos: $r = 1$, $r'_{12} = r'_{13} = r'_{23} = r' = 2$.

1883. Sean r y r' respectivamente los rangos de las matrices

Son posibles cuatro casos:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}.$$

1) $r = 3$, $r' = 4$; las rectas se cruzan; 2) $r = r' = 3$; las rectas se intersecan; 3) $r = 2$, $r' = 3$; las rectas son paralelas; 4) $r = r' = 2$; las rectas coinciden.

1884. Sean r y r' respectivamente los rangos de la matriz simple y de la ampliada de un sistema unido de ecuaciones (1) y (2). Son posibles cinco casos:

1) $r = r' = 4$; los planos se intersecan en un punto; 2) $r = 3$, $r' = 4$; los planos se cruzan y son paralelos a una recta, dada mediante aquellas tres de las ecuaciones (1) y (2) que tienen los primeros miembros linealmente independientes; 3) $r = r' = 3$; los planos se intersecan en una recta; 4) $r = 2$, $r' = 3$; los planos son paralelos; 5) $r = r' = 2$; los planos coinciden.

1885. Sean r y r' correspondientemente los rangos de las matrices

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n & c \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n & d \end{pmatrix}.$$

Son posibles tres casos:

1) $r = r' = 2$; los hiperplanos se intersecan por un plano $(n-2)$-dimensional; 2) $r = 1$, $r' = 2$, es decir, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} \neq \frac{c}{d}$, los hiperplanos son paralelos; 3) $r = r' = 1$, los hiperplanos coinciden.

1886. Indicación. Emplear el problema 1874 y la correspondiente propiedad de los subespacios.

1888, 1889 y 1890. Indicación. Emplear el problema 1887.

1891. Si $\pi_1 \parallel \pi_2$, $\pi_3 = \pi_1$; si $\pi_1 \neq \pi_2$, $\pi_3 = a_1 + (L_1 + L_2)$.

1893. Supongamos que el plano π_1 se da mediante un sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}x_n = c_s, \end{array} \quad (1)$$

y el plano π_2, mediante el sistema

$$\begin{array}{c} b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n = d_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{t1}x_1 + \ldots + b_{tn}x_n = d_t, \end{array} \quad (2)$$

y sean r_1, r_1' y r_2, r_2' respectivamente los rangos de la matriz compuesta por los coeficientes de las incógnitas y de la matriz ampliada de los sistemas (1) y (2), r y r' son los rangos de la matriz compuesta por los coeficientes de las incógnitas y la matriz ampliada del sistema unido que consta de todas las ecuaciones de los sistemas (1) y (2). Para que los sistemas (1) y (2) prefijen los planos es necesario y suficiente que cada uno de ellos sea compatible, es decir, $r_1 = r_1'$ y $r_2 = r_2'$. Al cumplirse estas condiciones para que dichos planos sean paralelos, son necesarias y suficientes las condiciones: $r = \text{máx}\,(r_1, r_2)$, $r' = r + 1$.

1895. a) El poliedro P se da mediante un sistema de desigualdades $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$, $x_4 \geqslant 0$, $x_1 + x_3 \leqslant 1$, $x_1 + x_4 \leqslant 1$, $x_2 + x_3 \leqslant 1$, $x_2 + x_4 \leqslant 1$; b) cuatro pirámides cuadrangulares: $OABCD$ con el vértice D, $OABCE$ con el vértice E, $ODEFA$ con el vértice A, $ODEFB$ con el vértice B y cuatro tetraedros $ACDF$, $ACEF$, $BCDF$, $BCEF$ son las caras tridimensionales. **Indicación.** A través de cada cuatro puntos que no yacen en un plano bidimensional trazar un plano tridimensional. Si $\sum a_i x_i = b$ es la ecuación de semejante plano y para las coordenadas de todos los puntos dados o bien $\sum a_i x_i \geqslant b$, o $\sum a_i x_i \leqslant b$, la correspondiente desigualdad entra en el sistema de desigualdades, que prefijan el poliedro P. La clausura convexa de todos los puntos que yacen en el plano tridimensional dado, será la cara tridimensional del poliedro dado. Por ejemplo, los puntos O, A, B, D determinan el plano tridimensional con la ecuación $x_4 = 0$. Para todos los puntos dados $x_4 \geqslant 0$. Por eso la desigualdad $x_4 \geqslant 0$ entra en el sistema buscado. En el plano tridimensional $x_4 = 0$ yacen cinco puntos dados: O, A, B, C, D. Su clausura convexa es una pirámide que es en sí una cara tridimensional del poliedro P. Al contrario, los cuatro puntos O, A, B, F determinan un plano tridimensional con la ecuación $x_3 - x_4 = 0$, con la particularidad de que para el punto D tenemos $x_3 - x_4 > 0$ y para el punto E tenemos $x_3 - x_4 < 0$. Esto significa que dicho plano no nos lleva a la desigualdad buscada y no contiene las caras del poliedro P. Para reducir la cantidad de los grupos de cuatro puntos en cuestión es necesario tener en cuenta que dos grupos de cuatro $OABC$ y $ODEF$ son equitativos derecho y yacen en planos bidimensionales.

1896. a) El poliedro P se prefija mediante el sistema de desigualdades $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$, $x_4 \geqslant 0$, $x_1 + x_4 \leqslant 1$, $x_2 + x_4 \leqslant 1$, $x_3 + x_4 \leqslant 1$. b) Son caras tridimensionales el cubo $OABCDEFG$ y seis pirámides cuadrangulares con el vértice común H, a saber: $OBCFH$, $OACEH$, $OABDH$, $ADEGH$, $BDFGH$, $CEFGH$.

1897. Cinco vértices: $A\,(1, 1, 1)$, $B\,(1, 1, -2)$, $C\,(1, -2, 1)$, $D\,(-2, 1, 1)$,

$E\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. El poliedro tiene seis caras triangulares ABC, ABD, ACD, BCE, BDE, CDE y representa dos tetraedros $ABCD$ y $BCDE$ con la base común BCD.

1898. a) El tetraedro con vértices (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1);

b) octaedro con vértices (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1);

c) un prisma triangular con bases en los puntos (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) y (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1);

d) un cuadrado con vértices (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1).

1899. a) 8; b) 28; c) 14; d) 2; e) 7; f) 4; g) 7; h) 6; i) 3, j) 3; k) 1; l) 6; m) 5; n) 12. **Indicación.** Introducir el sistema de coordenadas y examinar las ecuaciones paramétricas de la recta y el plano en forma vectorial.

1901. a) $a_i = \varphi(e_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

1902. $F(\varphi) = \varphi(x)$, $\varphi \in V_n^*$.

1904. $A' = C^*AC$, donde C es una matriz del cambio de la vieja base por la nueva, escrita por las columnas.

1905. $A' = D^*AD$, donde $D = (C^*)^{-1}$ y C es una matriz del cambio de la vieja base por la nueva, escrita por las columnas.

1906. $A' = C^{-1}AC = D^*AC$, donde C es una matriz del cambio de la vieja base por la nueva, escrita por las columnas y $D = (C^*)^{-1}$.

1907. b) $F(x, \varphi) = \varphi(x)$, $x \in V_n$, $\varphi_{\alpha j} \in V_n^*$.

1908. **Indicación.** b) usar la contracción $a_{i\alpha}b^{\alpha j}$ del tensor $a_{ij}b^{kl}$, donde b^{kl} es el tensor con las coordenadas $b^{kl} = a^{kl}$ en una misma base. Emplear el problema 1907.

1913. $a'^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} = a^{\pi(j_1)\pi(j_2)\ldots\pi(j_q)}_{\pi(i_1)\pi(i_2)\ldots\pi(i_p)}$.

1914. $a^{j_1 j_2 \ldots j_n}_{i_1 i_2 \ldots i_n} = (-1)^{s+t}$, donde s es la cantidad de inversiones en la permutación $i_1, i_2, \ldots, i_n$ y t, en la permutación de $j_1, j_2, \ldots, j_n$ si los índices por encima y por debajo son diferentes; en caso contrario la coordenada señalada es igual a cero.

1917. El invariante igual al número 0 en todas las bases.

1918. **Indicación.** a) Comprobar eso para cada una de las reglas de equivalencia, señaladas en la introducción a este párrafo; b) para demostrar la necesidad para $x \neq 0$ usar la contracción según φ con la propiedad $\varphi(x) \neq 0$. Para demostrar la suficiencia para el par $x0'$ poner $0 = 0x$ en el par $00'$; c) usar la contracción con $\varphi' \in V'$, para la cual $\varphi'(x'_i) = 1$, $\varphi'(x'_j) = 0$ $(j \neq i)$; d) utilizar c).

1923. b) $g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{12} = g_{21} = \cos\alpha$; c) $g^{11} = g^{22} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$; $g^{12} = g^{21} = -\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}$; d) $e^1 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}(e_1 - e_2\cos\alpha) = (1, -\operatorname{ctg}\alpha)$, $e^2 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} \times (-e_1\cos\alpha + e_2) = \left(0, \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\right)$; e) $(x, y) = x^1y^1 + (x^1y^2 + x^2y^1)\cos\alpha + x^2y^2$, donde $x = x^1e_1 + x^2e_2$, $y = y^1e_1 + y^2e_2$; f) $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = |\operatorname{sen}\alpha|$, $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$; g) $S = \varepsilon_{ij}x^iy^j = |\operatorname{sen}\alpha| \begin{vmatrix} x^1 & x^2 \\ y^1 & y^2 \end{vmatrix}$.

1924. Al pasar a la nueva base con la misma orientación, y no varía, y siendo otra la orientación, cambia de dirección. El vector y se obtiene de x girando en un ángulo $\pi/2$ en sentido negativo con respecto a la orientación de la base e_1, e_2. **Indicación.** Al aclarar la dependencia de y con respecto a la base, utilizar la invariación de las ecuaciones tensoriales. Para comprender la relación geométrica entre x e y, examinar una base ortonormal.

1925. Al pasar a la nueva base con la misma orientación las magnitudes b_{ij} cambian como las coordenadas de un tensor doblemente covariante. Al pa-

sar a la base de orientación contraria de la magnitud b_{ij} se cambia complementariamente el signo.

1926. $a_{ijk} = g_{i\alpha} g_{j\beta} a_k^{ij}$ $(i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$.

Indicación. Contraer ambos miembros de la igualdad dado en el problema con $g_{i\alpha'} g_{j\beta'}$ según i y j, utilizar la relación $g_{i\alpha'} g^{i\alpha} = \delta_{\alpha'}^{\alpha}$, y después de esto, cambiar las designaciones i, j por α, β y α', β' por i, j.

1928. $S = 3/2$, $h = 1$. **Indicación.** Buscar el área según la fórmula $S = \frac{1}{2} bc$ sen A o utilizar el problema 1935.

1929. Q (—4, 2, 0). **Indicación.** Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta PQ en coordenadas contravariantes.

1930. **Indicación.** Para demostrar b) tomar la base ortonormal e_1, e_2, e_3, e_4, donde e_1 está dirigido según u, y e_2, e_3, e_4 yacen en un plano tridimensional con x, y, z y tienen la misma orientación. Utilizar la expresión del volumen orientado según las fórmulas (17) y (18) de la introducción a este párrafo.

1931. La invariación, igual al número n en cualquier base.

1933. 6.

1934. b) $G_1 = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ -5 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\left(\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}} \right)$ con una precisión de hasta el signo.

1935. **Indicación.** Primer procedimiento: tomar los vectores dados en calidad de base; segundo procedimiento: elegir una base ortonormal.

1937. $d = \left| \frac{\operatorname{sen} \omega \, (ax_0 + by_0 + c)}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \omega}} \right|$. **Indicación.** Utilizar el problema 1936.

1938. **Indicación.** Pasar a la base ortonormal con la misma orientación.